

جمهورية العراق  
وزارة التربية  
المديرية العامة للمناهج

# الرياضيات

للمصف الرابع العلمي

تأليف

الدكتور / طارق شعبان رجب الحديشي  
يوسف شريف المعمار  
محمد عبد الغفور الجواهري

٢٠٢٤/١٤٤٦ هـ

الطبعة الخامسة عشر

المشرف العلمي على الطبع: م.م. مروة فليح حسن  
المشرف الفني على الطبع: د. علي مصطفى كمال رفيق



الموقع والصفحة الرسمية للمديرية العامة للمناهج

[www.manahj.edu.iq](http://www.manahj.edu.iq)

[manahjb@yahoo.com](mailto:manahjb@yahoo.com)

[Info@manahj.edu.iq](mailto:Info@manahj.edu.iq)



[manahjb](https://www.facebook.com/manahjb)

[manahj](https://www.youtube.com/channel/UCmanahj)

استنادًا إلى القانون يوزع مجانًا ويمنع بيعه وتداوله في الاسواق

يُعدّ هذا الكتاب الحلقة الأولى في سلسلة كتب الرياضيات الجديدة لطلبة الدراسة الإعدادية للفرع العلمي بوصفه بداية الدراسة الأكثر تخصصاً في هذا المجال وقد اشتمل على سبعة فصول وهي:

**الفصل الاول :** يتضمن المنطق الرياضي.

**الفصل الثاني :** المعادلات والمتباينات.

**الفصل الثالث :** تضمن المبادئ الأساسية في الاسس والجذور.

**الفصل الرابع :** تضمن معلومات أساسية في حساب المثلثات.

**الفصل الخامس :** تضمن هذا الفصل المفاهيم الأساسية في مجال هندسة المتجهات.

**الفصل السادس :** تضمن المعلومات والمفاهيم الأساسية في مجال الهندسة الاحداثية.

**الفصل السابع :** جاء هذا الفصل مكتملاً لما درسه الطالب في المرحلة المتوسطة في مادة الاحصاء.

في الختام نرجو من الله العلي القدير ان يوفقنا الى ما فيه الخير لبلدنا العزيز ونأمل من زملائنا المدرسين موافاتنا بملاحظاتهم بهدف التطوير والله الموفق.

[1-1] العبارة المنطقية

[1-2] اداة الربط اذا كان ... فان

[1-3] اداة الربط اذا و فقط اذا

[1-4] الاقتضاء

[1-5] الجمل المفتوحة

[1-6] تكافؤ الجمل المفتوحة

[1-7] العبارات المسورة

## الاهداف السلوكية

ينبغي ان يصبح الطالب في نهاية دراسته لهذا الموضوع قادراً على ان:

- يتعرف على قيم الصواب للعبارات ونفيها والعبارات المركبة
- يتعرف على الجمل المفتوحة والجمل المركبة من خلال التعرف على ادوات الربط
- يتعرف على تكافؤ الجمل المفتوحة
- يتعرف على العبارات المسورة ونفيها

الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
	العبارة المنطقية
$\wedge$	اداة الربط و
$\vee$	اداة الربط او
$\leftarrow$	اداة الربط اذا كان ... فان
$\leftrightarrow$	اداة الربط اذا و فقط اذا
$\Leftrightarrow, \Leftarrow$	الاقتضاء
$\exists, \forall$	التسوير : الكلي والجزئي

**تمهيد :** تحتاج الرياضيات الى سلسلة من الخطوات المرتبة بعضها على بعضها الآخر لكي نصل الى نتائج صحيحة . ومن هذه الزاوية يمكن النظر إلى الرياضيات على أنها نظام منطقي . وكتابة العبارات الرياضية في صور رمزية مع وضع قواعد ثابتة سهلة الاستخدام يكون ما يسمى (المنطق الرياضي) وعليه فان المنطق الرياضي ليس نظرية لكنه لغة علمية متفق عليها بين علماء الرياضيات فاللغة الاعتيادية (الدارجة) من الجائز أن يختلف القراء في فهمها كل حسب قدرته، أما في الرياضيات فلا نستطيع أن نترك مفهوم الجُمْل (العبارات) الرياضية لهذا الخلاف ، ولذا وضع العلماء إتفاقات لتفسير المقصود من الجُمْل الرياضية التي نستعملها.

### [1-1] العبارة المنطقية : Logical statement

**تواصل الدرس** لقد درسنا في الصف الثالث المتوسط في موضوع المنطق الرياضي نقسم الجُمْل الى نوعين :

أ) جملة لا تحمل إلينا خبراً معيناً .

ب) جملة تحمل إلينا خبراً معيناً ( جملة خبرية ) .

وان من مهام المنطق الرياضي هو معرفة ما اذا كانت الجملة الخبرية صائبة أو خاطئة . ولقد عرفت أن الجملة الخبرية تسمى عبارة منطقية وهي إما صائبة أو خاطئة ولا يمكن أن تكون صائبة وخاطئة في وقت واحد .

$\sim P$	P
F	T
T	F

ولقد علمت انه إذا رمزنا لعبارة منطقية بالرمز P فان نفي P تكون صائبة (T) (True) اذا كانت P خاطئة (F) (False) ويكون نفي P خاطئة اذا كانت P صائبة وعبرنا عن ذلك كما في

الجدول ( 1 - 1 )

الجدول ( 1 - 1 ) .

ومن المفيد ان نذكر جدولي قيم الصواب لأداتي الربط و (  $\wedge$  ) ، او (  $\vee$  ) :

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

الجدول (1-3)

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

الجدول (1-2)

### 1-2 / أداة الربط : ( إذا كان ... فأن ) *If ... then*

سنتعرف الان على اداة الربط (إذا كان ... فان ) فهي احدى الروابط التي تستخدم لتكوين العبارة المركبة ( Compound Statement ).

فالعبرة المركبة:

**إذا كان** المثلث  $P$  ب ج متساوي الساقين **فأن** قياس زاويتي قاعدته متساويان تكونت من ربط العبارة:

((المثلث  $P$  ب ج متساوي الساقين)) بالعبارة ((قياس زاويتي قاعدة المثلث  $P$  ب ج متساويان)) بأداة الربط . ((إذا كان ... فان)) .

وقد اصطلح على تسمية العبارة التي تلي (إذا كان) **بالمقدمة** والعبارة التي تأتي بعد (فإن) **بالتالية** . كما تسمى الاداة :

(إذا كان ... فان ) أداة الشرط.

فالعبرة (المثلث  $P$  ب ج متساوي الساقين) تكون مقدمة العبارة المركبة المذكورة سابقاً ، كما أن العبارة (قياس زاويتي قاعدة المثلث  $P$  ب ج متساويان) هي تاليها .

## والان لناخذ المثال الآتي :

قالت الأم لولدها : (اذا نجحت في الامتحان فسأعطيك هدية)  
لندرس الحالات الآتية:

(1) نجح الولد في الامتحان وقدمت له أمه هدية

(2) نجح الولد في الامتحان ولم تقدم له أمه هدية

(3) لم ينجح الولد في الامتحان وقدمت له أمه هدية

(4) لم ينجح الولد في الامتحان ولم تقدم له أمه هدية

سوف نقبل صواب العبارة التي ذكرتها الأم في الحالات الأولى والثالثة والرابعة أما إذا حصلت الحالة الثانية فإن العبارة التي ذكرتها تكون خاطئة .

وستنقق على استعمال محدد لأداة الربط (إذا كان ...فإن )

فإذا كانت P ، Q عبارتين فإنه يرمز للعبارة المركبة: بالرمز  $P \rightarrow Q$  .

وتقرأ (( اذا كان P فان Q ))

وقد اتفق على أن يكون جدول الصواب للعبارة  $P \rightarrow Q$  كالاتي :

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

الجدول (1-4)

أي أن  $P \rightarrow Q$  تكون خاطئة إذا كانت المقدمة «صائبة» والتالية «خاطئة» فقط .

أذكر قيم الصواب للعبارات الآتية :

مثال ( 1 ) :

(1) إذا كان  $\sqrt{2} < \sqrt{3}$  فإن  $\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$

(2) إذا كان  $12 = 7+5$  فإن  $7 = 6+2$

(3) إذا كان  $11 = 7+5$  فإن  $8 = 6+2$

(4) إذا كان صفر  $1 =$  فإن  $\sqrt{3}$  عدد نسبي

الحل :

(1) صائبة لأن المقدمة صائبة والتالية صائبة.

(2) خاطئة لأن المقدمة صائبة والتالية خاطئة.

(3) صائبة لأن المقدمة خاطئة والتالية صائبة.

(4) صائبة لأن المقدمة خاطئة والتالية خاطئة.

### [1-3] أداة الربط : (إذا فقط إذا) *If and only if*

كثيراً ما نستعمل العبارة المركبة:

$$(Q \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow Q)$$

فمثلاً : إذا كان المثلث متساوي الاضلاع فإن قياسات زواياه متساوية كذلك إذا كانت قياسات

زوايا مثلث متساوية فإنه يكون متساوي الاضلاع . تسمى أمثال هذه العبارة المركبة (عبارة شرطية

ثنائية ) فإذا فرضنا P,Q عبارتين فإن العبارة الشرطية الثنائية

$$P \leftrightarrow Q \text{ يرمز لها بالرمز } (Q \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow Q)$$

وتقرأ : (P إذا فقط إذا Q)

والجدول ( 5 - 1 ) هو جدول صواب العبارة :  $P \leftrightarrow Q$



$$P \leftrightarrow Q$$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(p \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

### جدول (1-5)

أي أن  $P \leftrightarrow Q$  تكون صائبة في حالتين هما : إذا كانت كل من العبارتين المركبتين لها صائبتين معاً أو خاطئتين معاً.

مثال ( 2 ) :

$$X=-1, X=4 \leftrightarrow X^2-3X-4=0 \text{ ( أ )}$$

$$X^5=-32 \leftrightarrow X=-2 \text{ ( ب )}$$

### [1-4] الاقتضاء Implication

سنوضح معنى الاقتضاء من خلال الحالتين الآتيتين :

**الحالة الأولى :** الاقتضاء في اتجاه واحد والذي يُرمز له  $\Rightarrow$

لنرمز : « $X=3$ » بالرمز P

ولنرمز : « $X^2=9$ » بالرمز Q

فإذا كانت  $X = 3$  صائبة فإن هذا يقتضي أن تكون  $X^2=9$

اي :  $P \Rightarrow Q$

أما إذا كانت  $X^2=9$  فان  $X = \pm 3$

اي :  $Q \not\Rightarrow P$

الحالة الثانية : الاقتضاء في اتجاهين متعاكسين والذي يُرمز له  $\Leftrightarrow$

لنرمز « $X=3$ » بالرمز P

ولنرمز « $X^3=27$ » بالرمز Q

فإذا كانت  $X=3$  صائبة فإن هذا يقتضي أن تكون  $X^3=27$

أي  $P \Rightarrow Q$

وإذا كانت  $X^3=27$  صائبة فإن هذا يقتضي أن تكون  $X=3$

أي  $Q \Rightarrow P$

أن  $(Q \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow Q)$  يعني ان  $P \Leftrightarrow Q$

مثال (3) :

إختر أحد الرمزين  $\Leftarrow$  ،  $\Leftrightarrow$  لوضعه بين التعبيرين في الحالات الآتية لتصبح العبارة صحيحة .

(أ)  $X=2, X^3=8$

(ب)  $X>2, X>5$

(ج)  $X^2 \geq 0, X \leq 0$

(د)  $P: P$  ب ج د شكل رباعي قطراه متناصفان ،  $Q: Q$  ب ج د متوازي اضلاع

الحل :

(أ)  $X^3=8 \Leftrightarrow X=2$

(ب)  $X>5 \Rightarrow X>2$

(ج)  $X \leq 0 \Rightarrow X^2 \geq 0$

(د)  $Q \Leftrightarrow P$

## العبارتان المتكافئتان *Equivalent Statements*

### تعريف (1-1)

يقال أن العبارة P مكافئة للعبارة Q إذا كان لها نفس جدول الصواب للعبارة ويرمز لها بالرمز  $P \equiv Q$

مثال (4) :

أثبت أن  $P \rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$

الحل :

نعمل الجدول الآتي :

P	Q	$\sim P$	$P \rightarrow Q$	$\sim P \vee Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

$\equiv$

## تمريبات (1 - 1)

س1 /

- بين أياً من العبارات التالية صائبة وأياً منها خاطئة مع السبب :
- (أ) العدد 5 يُقسم العدد 25 والعدد 7 يُقسم 25 .
- (ب) العدد 5 يُقسم العدد 25 أو العدد 7 يُقسم 25 .
- (ج) العدد 7 ليس أولياً أو العدد 4 أولياً .
- (د) قطرا المربع متعامدان و قطرا متوازي الاضلاع متناصفان .
- (هـ) قطرا المربع متعامدان أو قطرا المستطيل متعامدان .

س2 /

استخدم  $\Leftrightarrow$  أو  $\Leftarrow$  للربط بين العبارتين في الجدول الآتي لكي تصبح العبارة المركبة الناتجة صائبة :

العبارة Q	الرمز	العبارة P
قطرا الشكل الرباعي يتناصفان		الشكل الرباعي مستطيل
أضلاع الشكل الرباعي متطابقة		الشكل الرباعي معين
الشكل الرباعي قياس زواياه قوائم		الشكل الرباعي مستطيل
$a=0 \vee b=0$		$a.b=0, a,b \in R$
$X^2 = 9$		$X = -3$
الشكل الرباعي قياس زواياه قوائم		الشكل الرباعي مربع
$X = 5$		$X^2 = 25$
$X = -5$		$X^3 = -125$
p ب جـ مثلث متساوي الساقين		p ب جـ مثلث متساوي الاضلاع
$(X-1)(X-2)=0$		$X=1 \vee X=2$

س3 /

برهن ان :

$$P \rightarrow Q \equiv \sim Q \rightarrow \sim P \quad (1)$$

$$\sim(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \sim Q \quad (2)$$

س4 /

إذا كانت P صائبة ، Q صائبة ، S خاطئة فأى العبارات الآتية خاطئة وأيها صائبة ؟

$$(P \rightarrow Q) \vee S \quad (1)$$

$$(P \leftrightarrow S) \wedge P \quad (2)$$

$$(S \rightarrow Q) \wedge P \quad (3)$$

$$(S \leftrightarrow S) \vee S \quad (4)$$

س5 /

ضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة فيما يلي :-

S ، P عبارتين اعتمدت في الاسئلة الاتية :

$$P \rightarrow \sim P \text{ تكافىء } (1)$$

$$\sim P \wedge P \text{ (د) } \quad \sim P \text{ (ج) } \quad \sim P \rightarrow P \text{ (ب) } \quad P \rightarrow P \text{ (أ)}$$

$$S \leftrightarrow S \text{ عبارة } (2)$$

(أ) صائبة دائماً (ب) صائبة مرة واحدة (ج) خاطئة دائماً (د) خاطئة مرة واحدة

(3) نفي العبارة «  $9 > 5 + 3$  »  $\sim S \vee$  هو :-

$$\sim S \vee \text{ « } 9 < 5 + 3 \text{ » (ب) } \quad \sim S \vee \text{ « } 9 \geq 5 + 3 \text{ » (أ)}$$

$$S \wedge \text{ « } 9 \leq 5 + 3 \text{ » (د) } \quad \sim S \wedge \text{ « } 9 \leq 5 + 3 \text{ » (ج)}$$

## [1-5] الجمل المفتوحة Open Sentences

عرفنا العبارة المنطقية بأنها جملة خبرية إما صائبة أو خاطئة (وليس الاثنان معاً) .  
ولكن اذا لاحظنا الجمل الآتية :

أ)  $X$  عدد صحيح أكبر من الصفر والتي نرمز لها بالرمز  $P(X)$

ب)  $Y+1=3$  والتي نرمز لها بالرمز  $Q(Y)$

ج)  $a+b=6$  حيث  $a, b$  أعداد صحيحة والتي نرمز لها بالرمز  $G(a,b)$

د) . . . . .أحدى مدن العراق.

وجدنا ليس بالامكان القول أن كلاً من هذه الجمل تمثل عبارة منطقية . ولكن إذا عوضنا في الجملة (أ) بالعدد 9 بدل الحرف  $X$  تصبح (9 عدد صحيح أكبر من الصفر) وهذه عبارة صائبة اعط قيمة لـ  $(Y)$  في الجملة (ب) لتجعلها عبارة خاطئة . ولو أعطيت كلاً من  $a, b$  قيمة تساوي 3 نحصل على العبارة  $(6=3+3)$  وهي عبارة صائبة . ضع الاسم في الفراغ المناسب في الجملة (د) لتجعلها عبارة صائبة .

### تعريف (1-2)

1) المتغير هو رمز يأخذ قيمةً لمجموعة من الاشياء المفروضة من مجموعة التعويض لذلك المتغير .

2) الجملة المفتوحة هي جملة تحتوي على متغير أو أكثر وتتحول إلى عبارة عند إعطاء كل متغير قيمة معينة من مجموعة التعويض .

## [1-6] تكافؤ الجمل المفتوحة :

لتكن:  $P(X): 2X=4$

$Q(x): X-1=1$

ولتكن مجموعة التعويض لكل منها هي مجموعة الأعداد الصحيحة  $(Z)$  نلاحظ أن مجموعة الحل للجملة المفتوحة  $P(X)$  هي  $\{2\}$  وإن مجموعة الحل للجملة المفتوحة  $Q(X)$  هي  $\{2\}$  .  
تسمى الجملتان المفتوحتان  $Q(X), P(X)$  متكافئتين وذلك لتساوي مجموعتي الحل لكل منهما .

مثال (5) :

إذا كانت  $P(X):X=2$

ومجموعة التعويض لكل منها هي مجموعة الأعداد الصحيحة  $Z$ .

هل  $P(X),Q(X)$  متكافئتان ؟

الحل :

نلاحظ أن مجموعة الحل للجملة المفتوحة  $P(X)$  هي  $\{2\}$  وأن مجموعة الحل للجملة المفتوحة  $Q(X)$  هي  $\{2,-2\}$  وبما أن  $\{2,-2\} \neq \{2\}$  لذا نقول أن الجملتين المفتوحتين  $P(X)$  ،  $Q(X)$  جملتان غير متكافئتين .

### تعريف (1-3)

إن نفي الجملة المفتوحة  $P(X)$  هي الجملة المفتوحة «ليس صحيحاً  $P(X)$ » أو أي جملة مفتوحة تكافئ ذلك وسوف نستعمل الرمز  $\sim P(X)$  للتعبير عن نفي الجملة المفتوحة  $P(X)$ .

مثال (6) :

لنفرض أن مجموعة التعويض لكل جملة مفتوحة فيما يلي هي مجموعة الأعداد الصحيحة  $Z$ .

الجملة المفتوحة $P(X)$	نفيها $\sim P(X)$
$X^2-4=0$	$X^2-4 \neq 0$
$X$ عدد صحيح زوجي	$X$ ليس عدداً صحيحاً زوجياً
$X=4$ و $X+1 \neq 6$	$X \neq 4$ او $X+1=6$

## تمرينات ( 1 - 2 )

س1 /

اكتب مجموعة الحل لكل جملة مفتوحة من الجمل الآتية:

مجموعة التعويض

الجملة المفتوحة

N	$X < 3$	(أ)
{10, 6, 5, 3}	$X^2 - 11X + 30 = 0$	(ب)
Z	$(X-1)(X - \frac{3}{5})(X-30) = 0$	(ج)
N	$(X-1)(X-5) = 0$ و $X > 4$	(د)
{10, 8, 6, 4, 2}	X لا تقبل القسمة على 4	(هـ)
Z	$X + 5 \geq 0$	(و)

س2 / يوجد في كل مما يأتي زوج من الجمل المفتوحة ، أي من هذه الأزواج يمثل جملتين مفتوحتين متكافئتين مع العلم أن مجموعة التعويض هي Z .

- (أ)  $X - 3 = 3$  ,  $3X - 5 = X + 7$  (ب)  $X = 2$  ,  $X^2 = 4$  (ج)  $X^2 = 9$  ,  $X = 3$  او  $X = -3$   
 (د)  $(X+1)(2X+1) = 0$  ,  $X+1 = 0$  (هـ)  $X^2 - 6X + 5 = 0$  ,  $(X-1)(X-5) = 0$   
 (و)  $X = 0$  ,  $X$  أكبر من -1 و أصغر من 1 (ز)  $(X-1)(X-2) = 0$  ,  $3 > X \geq 0$

س3 / انفِ كل جملة مفتوحة من الجمل الآتية ثم جد مجموعة الحل للجملة المنفية مع العلم أن مجموعة التعويض هي { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 }

- (أ)  $2X = 4$  (ب)  $X + 4 = 7$  (ج)  $(X-3)(X-4) = 0$  (د)  $X^2 \neq 9$  و  $X + 2 = 4$  (هـ)  $X^2 = 16$  او  $X - 1 = 4$

س4 / إذا علمت أن X ، Y عناصر في المجموعة { 0 , 1 , 2 , ... , 9 }

فاكتب مجموعة الحل لكل من الجمل المفتوحة الآتية على شكل أزواج مرتبة

(أ)  $X - Y = 3$

(ب)  $X + Y = 15$



### [1-7-1] العبارات المسورة كلياً والعبارات المسورة جزئياً :

يحاول المنطق الرياضي عندما يكون ذلك ممكناً الاستعاضة عن الكلمات برموز متفق عليها وسنقدم هنا رمزين منطقيين هاميين :

**أولاً :** إذا أردنا أن نذكر أن كل عنصر من مجموعة A يجعل  $F(X)$  عبارة صائبة فإننا نقول : «مهما كان  $a$  من A فإن  $F(a)$  عبارة صائبة»  
أو «لكل  $a \in A$  يكون  $F(a)$  عبارة صائبة»  
ويكتب هذا القول بشكل رمزي مختزل على النحو الآتي:

$$a \in A \quad \forall \quad \text{فإن } F(a) \text{ عبارة صائبة .}$$

يسمى الرمز  $\forall$  سوراً كلياً (دلالة الشمول) أو المسور الكلي وتسمى العبارة

$$a \in A \quad \forall \quad \text{فإن } F(a) \text{ عبارة مسورة كلياً .}$$

**مثلاً :**

$(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$  صائبة لكل عدد طبيعي يوضع مكان X ويمكن كتابتها كما يأتي :

$$\forall X \in \mathbb{N} \quad \text{فإن } (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$$

**ثانياً :** إذا أردنا أن نذكر أن بعض عناصر مجموعة A تجعل  $G(x)$  عبارة صائبة فإننا نقول :

«يوجد في الاقل عنصر من A يجعل  $G(x)$  عبارة صائبة»

ونكتب هذا الكلام بشكل رمزي كالآتي :

$$\exists b \in A \quad \text{بحيث } G(b) \text{ عبارة صائبة (دلالة الوجود)}$$

يسمى الرمز  $\exists$  سوراً جزئياً وتسمى العبارة  $\exists b \in A$  ،  $G(b)$  عبارة مسورة جزئياً فإذا أردنا

مثلاً أن نقول أن للمعادلة  $X+1=2$  حلاً في مجموعة الأعداد الصحيحة Z كتبنا :

$$\exists X \in \mathbb{Z} \quad \text{بحيث } X+1=2$$

ونذكر ما تقدم بقولنا :

«يوجد في الاقل عنصر  $X \in \mathbb{Z}$  بحيث تكون المعادلة  $X+1=2$  محققة».

## [2-7-1] نفي العبارات المسورة :

عندما نريد نفي العبارات المسورة ننتبه الى الآتي:

«إن كل عبارة يجب أن تتصف بواحدة وواحدة فقط من الصفتين :  
صائبة أو خاطئة».

- فلو أردنا مثلاً نفي العبارة :

«مهما يكن الوتر المرسوم في دائرة فإن العمود النازل عليه من مركز هذه الدائرة ينصفه»  
فاننا نقول :

«يوجد في الاقل وتر واحد مرسوماً في هذه الدائرة بحيث أن العمود النازل عليه من مركزها لا  
ينصفه».

-وإذا اردنا إثبات خطأ القول :

«كل عدد طبيعي يقبل القسمة على 2 يقبل القسمة على 6» فإنه يكفي أن نبرهن صواب القول:  
«يوجد في الاقل عدد طبيعي واحد يقبل القسمة على 2 ولا يقبل القسمة على 6».

- وإذا أردنا نفي القول:

«يوجد في الاقل مثلث قائم واحد لا يحقق مبرهنة فيثاغورس».

قلنا «مهما يكن المثلث القائم فإنه يحقق مبرهنة فيثاغورس».

ينتج من الأمثلة التي قدمناها أن:

$$\sim [ P(x) \text{ فأن } \forall x \in X ] \equiv \sim P(x) \text{ فأن } \exists x \in X$$

$$\sim [ P(x) \text{ فأن } \exists x \in X ] \equiv \sim P(x) \text{ فأن } \forall x \in X$$

مثال ( 7 ) :

انفِ كلاً مما يأتي:

(1)  $\forall X$  فإن  $P(X)$  حيث أن :

$P(X)$  : إذا كان  $X$  عدداً طبيعياً فإن  $X > 0$

(2)  $\exists X$  فإن  $P(X)$  حيث أن :

$P(X)$  :  $X$  عدد زوجي موجب

(3)  $P \vee [ \exists X \in R : X+3 \geq 5 ]$

الحل:

$$(1) \exists X \text{ فإن } \sim P(X) \equiv \sim [P(X) \text{ فإن } \forall X]$$

$$\sim P(X) : \exists X \text{ عدد طبيعي حيث } X \leq 0$$

وبالكلام : يوجد عدد طبيعي أصغر أو يساوي صفرًا .

$$(2) \forall X \text{ فإن } \sim P(X) \equiv \sim [P(X) \text{ فإن } \exists X]$$

$\forall X : \sim P(X)$  عدداً زوجياً فإن  $X$  غير موجب وبالكلام : مهما يكن  $X$  عدداً زوجياً فإن

$X$  غير موجب .

$$(3) \sim P \wedge [\forall X \in \mathbb{R} : X+3 < 5]$$

### [1-7-3] التحصيل الحاصل Tautology :

إذا كان لدينا العبارة المنطقية  $P$  وكانت جميع الاحتمالات المنطقية لهذه العبارة صائبة فإن  $P$  تسمى تحصيلاً حاصلًا .

مثال ( 8 ) :

لتكن  $P$  عبارة هل  $P \vee \sim P$  تشكل تحصيلاً حاصلًا ؟

الحل:

$P$	$\sim P$	$P \vee \sim P$
T	F	T
F	T	T

∴ تشكل تحصيلاً حاصلًا .

ملاحظة : إذا كان جميع قيم الصواب خاطئة تدعى تناقض ( Contradiction ) .

## تمرينات (1-3)

س1 /

- انف كل عبارة من العبارات الآتية من دون استعمال ليس صحيحاً بدلها :
- ( أ ) جميع المثلثات المتشابهة متساوية الساقين .
- ( ب ) بعض المثلثات المتشابهة غير متطابقة .
- ( ج ) إذا كان المثلث قائم الزاوية فإنه يكون متساوي الساقين .
- ( د ) بعض المعادلات ليس لها حل .
- ( هـ ) كل شكل رباعي مستطيل .
- ( و )  $Q: \forall X \in \mathbb{N} : X^2 = 25$
- ( ح )  $( \forall X \in \mathbb{R} : X < 8 ) \wedge P$

س2 /

- بين صواب أو خطأ كل من العبارات الآتية :
- ( أ )  $\forall X$  ، فإن  $P(X)$  حيث أن :  
 $P(X)$ : إذا كان  $X$  عدداً طبيعياً فإن  $X^2 = X$
- ( ب )  $\exists X$  فإن  $P(X)$  حيث أن :  
 $P(X)$ :  $X$  عدد طبيعي ،  $X^2 = X$
- ( ج )  $\forall X$  فإن  $P(X)$  حيث أن :  
 $P(X)$ : إذا كان  $X$  عدداً سالباً فإن  $X^2$  عدد موجب .
- ( د )  $P$  ،  $Q$  عبارتان منطقيتان :  $Q \wedge P \rightarrow Q$  تحصيلاً حاصلًا .
- ( هـ )  $P$  عبارة :  $P \wedge \sim P$  تناقض
- ( و )  $P$  ،  $Q$  عبارتان منطقيتان :  $( P \leftrightarrow Q ) \leftrightarrow ( P \leftrightarrow Q )$  تحصيلاً حاصلًا .

- [2-1] القيمة المطلقة ورسم الدالة  $Y = |X|$
- [2-2] حل المعادلات التي تحتوي على مطلق
- [2-3] حل معادلتين أنيتين بمتغيرين
- [2-4] الفترات
- [2-5] حل المتباينة ( المتراجحة ) من الدرجة الأولى في متغير واحد
- [2-6] حل المتباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد

### الاهداف السلوكية

يهدف تدريس هذا الفصل الى تحقيق الاهداف الاتية:

- يتعرف على القيمة المطلقة
- يحل معادلة تحتوي على مطلق
- يحل معادلتين أنيتين من الدرجة الثانية بمتغيرين
- يحل متباينة من الدرجة الاولى بمتغيرين
- يحل متباينة من الدرجة الثانية بمتغير واحد



### تعريف ( 15 - 2 )

تُعرف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي  $X$  والتي نرمز لها بالرمز  $|X|$  كما يأتي :

$$|x| = \begin{cases} X, & \forall X > 0 \\ 0, & X = 0 \\ -X, & \forall X < 0 \end{cases}$$

مثال ( 1 ) :

عبر باستخدام تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي عن كل مما يأتي :

( أ )  $|3 - \sqrt{10}|$  ( ب )  $|X - 3|$  حيث  $X \in \mathbb{R}$

الحل :

$$|X - 3| = \begin{cases} X - 3, & \forall X > 3 \text{ (ب)} \\ 0, & X = 3 \\ -X + 3, & \forall X < 3 \end{cases} \quad \begin{aligned} \text{( أ ) لان } & 3 = \sqrt{9} < \sqrt{10} \\ \therefore & |3 - \sqrt{10}| = \sqrt{10} - 3 > 0 \end{aligned}$$

ينتج من التعريف ( 15 - 2 ) أن القيمة المطلقة تتمتع بالخواص الآتية :

( 1 )  $\forall X \in \mathbb{R}$  فإن  $|X| \geq 0$

( 2 )  $\forall X \in \mathbb{R}$  فإن  $|-X| = |X|$

( 3 )  $\forall X \in \mathbb{R}$  فإن  $-|X| \leq X \leq |X|$

( 4 )  $|X|^2 = X^2, \forall X \in \mathbb{R}$

( 5 )  $\forall X, Y \in \mathbb{R}$  فإن  $|X \cdot Y| = |X| \cdot |Y|$

حيث  $Y \neq 0$   $|\frac{X}{Y}| = \frac{|X|}{|Y|}$

( 6 )  $\forall X, Y \in \mathbb{R}$  فإن  $|X + Y| \leq |X| + |Y|$

( 7 )  $\forall a > 0, X \in \mathbb{R}$  إذا كان  $|X| \leq a$  فإن  $-a \leq X \leq a$

ملاحظة :

اعط لكل من  $X, Y$  قيماً  
عددية وتأكد من صحة  
الخواص بنفسك .

مثال 2 :

إرسم  $Y = |X|$

الحل :

حسب تعريف (2-15)

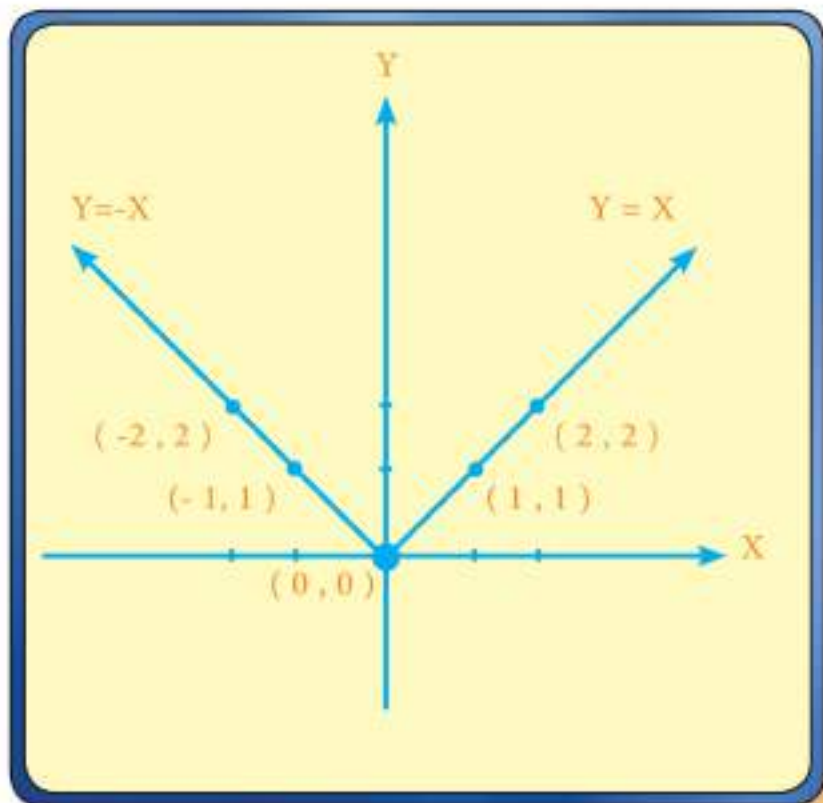
$$Y = \begin{cases} X, & \forall X > 0 \\ 0, & X = 0 \\ -X, & \forall X < 0 \end{cases}$$

أولاً: المستقيم  $Y = X$  ,  $x \geq 0$

X	Y	(X, Y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)

ثانياً: المستقيم  $Y = -X$  ,  $X < 0$

X	Y	(X, Y)
0	0	فجوة (0, 0)
-1	1	(-1, 1)
-2	2	(-2, 2)



$Y = |X|$

مثال 3 :

إرسم  $Y = |X - 1| + 3$

الحل :

حسب تعريف (2-15)

$$Y = \begin{cases} (X-1)+3, & \forall X \geq 1 \\ (-X+1)+3, & \forall X < 1 \end{cases}$$

$$\therefore Y = \begin{cases} X+2, & \forall X \geq 1 \\ -X+4, & \forall X < 1 \end{cases}$$

أولاً : المستقيم

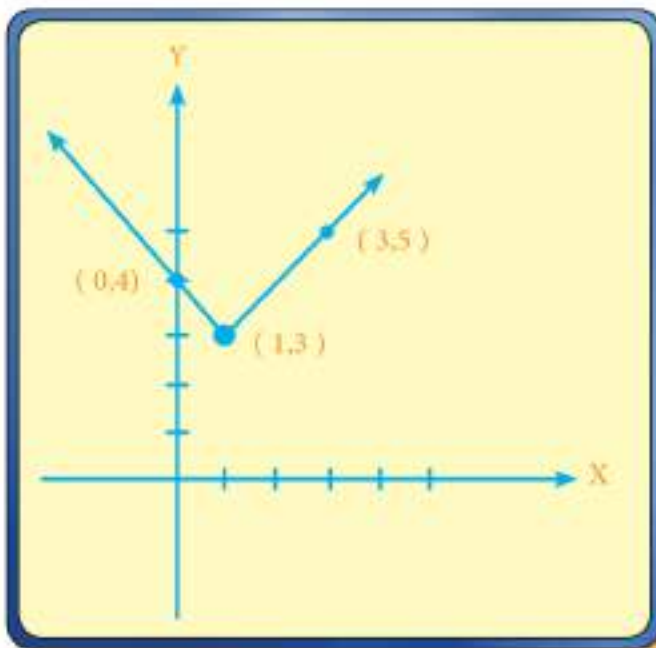
$$\forall X \geq 1, Y = X + 2$$

X	Y	(Y, X)
1	3	(1, 3)
3	5	(3, 5)

ثانياً : المستقيم

$$\forall X < 1, Y = -X + 4$$

X	Y	(X, Y)
1	3	فجوة (1, 3)
0	4	(0, 4)



$$Y = |X - 1| + 3$$



## [ 2 - 2 ] حل المعادلات التي تحتوي على مطلق :

مثال ( 4 ) :

جد مجموعة الحل للمعادلة:  $|3X+6|=9$  حيث  $X \in R$ .

الحل :

نستنتج من تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي أن:

$$\left. \begin{array}{l} 3X+6 \text{ إذا كان } 0 \leq 3X+6 \text{ أي } X \geq -2 \\ -(3X+6) \text{ إذا كان } 0 > 3X+6 \text{ أي } X < -2 \end{array} \right\} = |3X+6|$$

إن هذه المعادلة تكافئ النظام:

$$\left. \begin{array}{l} 3X+6=9 \text{ مجموعة التعويض هي } \{ X: X \geq -2 \} \text{ ..... (1)} \\ -3X-6=9 \text{ مجموعة التعويض هي } \{ X: X < -2 \} \text{ ..... (2)} \end{array} \right\}$$

يمكننا أن نعدّ هذا النظام نظام معادلتين بالمتغيرين  $x, y$ . حيث معامل  $y$  فيها يساوي الصفر.

إن مجموعة حل هاتين المعادلتين هي :

$$S_1 = \{ 1 \}, S_2 = \{ -5 \}$$

∴ . مجموعة حل النظام هي  $S = S_1 \cup S_2 = \{ 1, -5 \}$ .

مثال (5) :

جد مجموعة حل المعادلة :  $\forall X \in \mathbb{R} , X^2 |X| - 8 = 0$  .

الحل :

من تعريف القيمة المطلقة فان المعادلة  $X^2 |X| - 8 = 0$  تكافىء النظام :

$$* X^3 - 8 = 0 , \forall X \geq 0 \Rightarrow X^3 = 8 \Rightarrow X = 2$$

$$S_1 = \{ 2 \}$$

$$* -X^3 - 8 = 0 , \forall X < 0 \Rightarrow X^3 = -8 \Rightarrow X = -2$$

$$S_2 = \{ -2 \}$$

$$. S = S_1 \cup S_2 = \{ 2 , -2 \}$$

مثال (6) :

جد مجموعة حل المعادلة :  $\forall X \in \mathbb{R} , X^2 + |X| - 12 = 0$  .

الحل :

من تعريف القيمة المطلقة فان المعادلة  $X^2 + |X| - 12 = 0$  تكافىء النظام :

$$* X^2 + X - 12 = 0 , \forall X \geq 0 \Rightarrow (X + 4)(X - 3) = 0$$

اما  $X = -4$  يهمل لماذا ؟ او  $X = 3$

$$S_1 = \{ 3 \} \quad \therefore$$

$$* X^2 - X - 12 = 0 , \forall X < 0 \Rightarrow (X - 4)(X + 3) = 0$$

اما  $X = 4$  يهمل لماذا ؟ او  $X = -3$

$$S_2 = \{ -3 \} \quad \therefore$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{ 3 , -3 \}$$

### [ 3 - 2 ] حل معادلتين آيتين بمتغيرين.

لقد تعلم الطالب حل نظام مؤلف من معادلتين من الدرجة الأولى بمتغيرين بيانياً، وحينذاك وضحنا الآتي اذا كان  $S_1$  حلاً للمعادلة الأولى،  $S_2$  حلاً للمعادلة الثانية، فإن مجموعة حل النظام  $S = S_1 \cap S_2$ . اذا كانت المعادلتين مربوطتين باداة الربط و أما إذا كان الرابط أو فإن حل النظام هو  $S = S_1 \cup S_2$ .

مثال ( 7 ) :

إذا كانت  $R$  هي مجموعة التعويض لكل من  $X$ ،  $Y$  فجد مجموعة الحل بطريقتين :  
تحليلياً و بيانياً

$$X - 2Y = 5 \dots\dots (1)$$

$$2X + Y = 0 \dots\dots (2)$$

الحل :

تحليلياً : بضرب طرفي المعادلة (2) بالعدد 2 :

$$X - 2Y = 5 \dots\dots (1)$$

$$\text{بالجمع} \quad 4X + 2Y = 0 \dots\dots (2)$$

$$5X = 5 \Rightarrow X = 1$$

نعوض في (1):

$$1 - 2Y = 5$$

$$\Rightarrow Y = -2$$

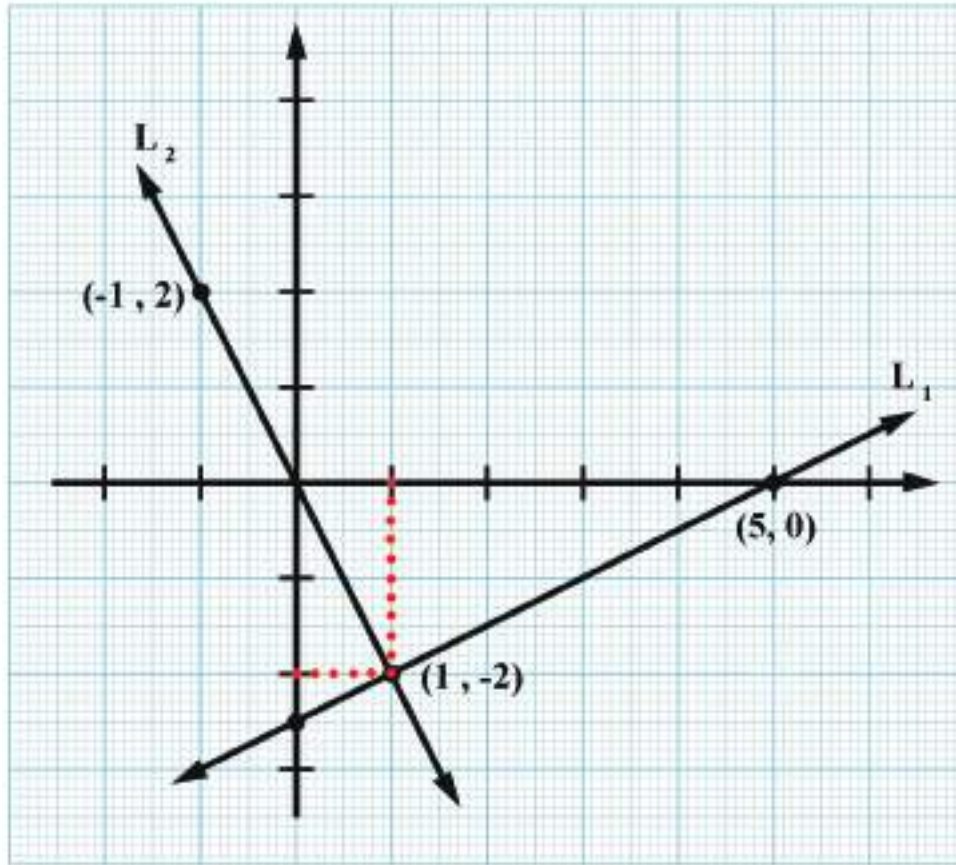
∴ مج =  $\{(1, -2)\}$ . وهي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين .

بيانياً : المستقيم  $L_1 : X - 2Y = 5$

X	Y	(X, Y)
0	-5/2	(0, -5/2)
1	-2	(1, -2)
5	0	(5, 0)

المستقيم  $L_2 : 2X + Y = 0$

X	Y	X, Y
0	0	(0,0)
1	-2	(1,-2)
-1	2	(-1,2)



مثال 8 :

إذا كانت  $R$  هي مجموعة التعويض لكل من  $x, y$  فجد مجموعة حل النظام

$$X - Y = 1$$

$$X^2 + Y^2 = 13$$

الحل :

هذا النظام يحل بطريقة التعويض حيث نجد  $x$  بدلالة  $y$  او بالعكس حسب المعادلة فيكون

$X = 1 + Y$  تعوض في المعادلة الثانية فيكون

$$(1+y)^2 + y^2 = 13 \Rightarrow 2y^2 + 2y - 12 = 0$$

بالقسمة على 2

$$y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow (y+3)(y-2) = 0$$

$$y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow (-2, -3)$$

$$y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3, 2)$$

$$\therefore S = \{(-2, -3), (3, 2)\}$$

حل المثال الآتي اذا كانت مجموعة التعويض R لكل من x,y بطريقة الحذف

$$2x^2 - 3y^2 = -46 , x^2 + y^2 = 17$$

الحل :

بما ان المعادلتين من نفس الدرجة، اذن يمكن حل النظام بطريقتين الحذف والتعويض (يترك للطالب)

$$x^2 + y^2 = 17 \dots (1)$$

$$2x^2 - 3y^2 = -46 \dots (2)$$

..... (بضرب المعادلة الاولى في 3)

$$3x^2 + 3y^2 = 51$$

$$2x^2 - 3y^2 = -46$$

..... بالجمع

$$5x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$$

$$x=1 \Rightarrow (1)^2 + y^2 = 17 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \mp 4 \Rightarrow (1, 4), (1, -4)$$

$$x=-1 \Rightarrow (-1)^2 + y^2 = 17 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \mp 4 \Rightarrow (-1, 4), (-1, -4)$$

$$S = \{(1, 4), (1, -4), (-1, 4), (-1, -4)\}$$

### الخلاصة

(1) اذا كانت المعادلتين من نفس الدرجة (الاولى او الثانية) فتحل بطريقتي  
\* الحذف \* التعويض

(2) اذا كانت احدهما من الدرجة الاولى والاخرى من الدرجة الثانية فتحل بطريقة  
التعويض

## [ 2 - 4 ] الفترات Intervals :

ليكن  $a, b \in \mathbb{R}$  ،  $a < b$

( 1 ) تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية :

{  $X : X \in \mathbb{R}, a \leq X \leq b$  } الفترة المغلقة Closed Interval من  $a$  الى  $b$  ونرمز لها بالرمز  $[ a , b ]$  وتمثل على خط الأعداد كما في الشكل ( 1 - 2 ) حيث رمزنا لنقطة البداية للقطعة المستقيمة التي تمثل الفترة المغلقة باحداثيها (  $a$  ) ولنقطة النهاية لهذه القطعة باحداثيها (  $b$  ) لقد أهملنا على هذا الشكل ذكر نقطة الأصل (  $o$  ) يلاحظ وجود تقابل بين مجموعة الأعداد الحقيقية المنتمية إلى الفترة  $[ a , b ]$  ومجموعة نقاط القطعة المستقيمة  $a b$



الشكل ( 1 - 2 )

( 2 ) نسمي المجموعة

$(a, b) = \{X : X \in \mathbb{R}, a < X < b\}$  لفترة المفتوحة Open Interval من (  $a$  ) الى (  $b$  ) وتمثل على

خط الأعداد الحقيقية كما في الشكل ( 2 - 2 )



الشكل ( 2 - 2 )

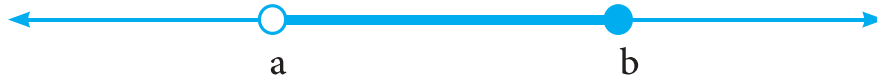
يلاحظ في هذه الحالة أن  $a \notin (a, b)$  ،  $b \notin (a, b)$  والدائرتين حول العددين  $a, b$  في الشكل تدلان على ذلك .

(3) نسمي كلا من :

$$(a, b] = \{X : X \in \mathbb{R}, a < X \leq b\}$$

$$[a, b) = \{X : X \in \mathbb{R}, a \leq X < b\}$$

الفترة نصف المغلقة (أو نصف المفتوحة Half Open) حيث  $a < b$  وتمثل المجموعة الأول كما في الشكل (2 - 3)



الشكل (2 - 3)

وتمثل المجموعة الثانية كما في الشكل (2 - 4)

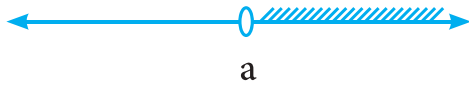


الشكل (2 - 4)

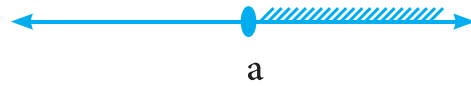
(4) مجموعة الأعداد الحقيقية التي تزيد على العدد الحقيقي (a) أو تساويه هي :

$$\{X : X \in \mathbb{R}, X \geq a\}$$

كما أن المجموعة  $\{X : X \in \mathbb{R}, X > a\}$  يمثلها الشكل (2 - 6)



الشكل (2 - 6)



الشكل (2 - 5)

(5) مجموعة الأعداد الحقيقية التي تساوي العدد الحقيقي (a) أو تصغره هي

$$\{X : X \in \mathbb{R}, X \leq a\}$$

فيمثلها الشكل (2 - 7)

$$\{X : X \in \mathbb{R}, X < a\}$$

فيمثلها الشكل (2 - 8)

**ملاحظة :**  
المجموعة في (4) و (5)  
تدعى مجموعات عددية غير  
محددة (شعاع)



الشكل (2 - 8)



الشكل (2 - 7)

مثال (1) :

لتكن  $X = [1, 6]$  ،  $Y = [3, 8]$  مثل على خط الأعداد

1)  $X \cap Y$

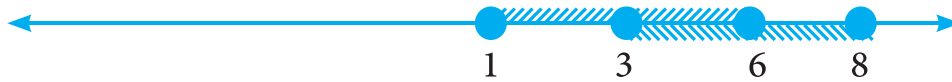
2)  $X \cup Y$

3)  $X - Y$

4)  $Y - X$

ثم اكتب الناتج على شكل فترة

الحل :



1)  $X \cap Y = [3, 6]$

3)  $X - Y = [1, 3)$

2)  $X \cup Y = [1, 8]$

4)  $Y - X = (6, 8]$

مثال (2) :

مثال (1)  $\{X : X \geq -3\} \cup (-5, 2]$  على خط الأعداد

(2)  $\{X : X \geq -3\} \cap (-5, 2]$  على خط الأعداد

الحل :



$\therefore$  1)  $\{X : X \geq -3\} \cup (-5, 2] = \{X : X > -5\}$

2)  $\{X : X \geq -3\} \cap (-5, 2] = [-3, 2]$



## [ 2 - 5 ] حل المتباينة (المتراحة) من الدرجة الاولى في متغير واحد :

إن المتباينة التي تحوي متغير ( X ) والتي تكتب بالشكل :  $f(X) < g(X)$  حيث  $f(X)$  ،  $g(X)$  جملتان مفتوحان تسمى متباينة Inequality في متغير واحد ( X ) .  
وكما تعلم من دراستك السابقة إذا كانت مجموعة القيم التي أعطيت لـ ( X ) في هذه المتباينة وجعلها عبارة صائبة ، نقول أوجدنا مجموعة حل هذه المتباينة . وتُعرف المتباينات المتكافئة كما عُرِفَت المعادلات المتكافئة .

### تعريف ( 2 - 16 )

نقول عن المتباينة  $f(X) < g(X)$  متباينة مكافئة للمتباينة  $h(X) < I(X)$  إذا كان لهما مجموعة الحل نفسها.

سنهتم في هذا البند بحل المتباينات التي يكون فيها كل من  $f(X)$  ،  $g(X)$  كثيرة الحدود .

مثال ( 1 ) :

جد مجموعة الحل للمتباينة :  $3X + 1 < X + 5$   
إذا كانت مجموعة التعويض هي R ، وضع مجموعة الحل على خط الأعداد .

الحل :

$$3X + 1 < X + 5$$

$$3X + 1 + (-X) < X + 5 + (-X)$$

$$\Leftarrow 2X + 1 < 5 \text{ خواص المتباينات}$$

$$\Leftarrow 2X + 1 + (-1) < 5 + (-1)$$

$$\Leftarrow 2X < 4 \text{ خواص المتباينات .}$$

$$(2X)\left(\frac{1}{2}\right) < 4\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Leftarrow$$

$$X < 2 \quad \Leftarrow \text{خواص الحقل .}$$

$$\{ X : X \in \mathbb{R}, X < 2 \} = \text{مجموعة الحل .}$$



إذا ربطنا متباينتين بالرابط **و** فإن قيمة  $X$  التي تحقق هذا النظام المؤلف من متباينتين من الدرجة الأولى في متغير واحد يجب أن تنتمي إلى مجموعة حل المتباينة الأولى وإلى  $S_2$  مجموعة حل المتباينة الثانية . أي إلى  $S_1 \cap S_2$  : وهذا يعني:

أن مجموعة حل النظام المكون من المتباينتين والرابط **و** هي :

$$S = S_1 \cap S_2$$

ويمكننا أن نستنتج بشكل مشابه أن مجموعة حل النظام المكون من متباينتين والرابط **أو** هي

$$S = S_1 \cup S_2$$

**مثال ( 2 ) :**

إذا كانت مجموعة التعويض هي  $( R )$  جد مجموعة الحل للنظام :

$$5X + 11 < 1 \quad \text{و} \quad 2X + 3 < 6$$

مثل إجابتك على خط الأعداد .

**الحل :**

مجموعة الحل للمتباينة الأولى هي  $S_1 = \{ X : X \in \mathbb{R}, X < -2 \}$

مجموعة الحل للمتباينة الثانية هي  $S_2 = \{ X : X \in \mathbb{R}, X < \frac{3}{2} \}$

مجموعة الحل لنظام المتباينتين هي :  $S$

$$S = S_1 \cap S_2 = \{X: X < -2\} \cap \{X: X < \frac{3}{2}\}$$

$$S = \{X: X < -2 \text{ و } \frac{3}{2} > X\}$$



العناصر المشتركة بين  $S_1$ ،  $S_2$  هي  $S_1$  نفسها

$$S_1 \cap S_2 = S_1 = \{X: X < -2, X \in \mathbb{R}\}$$



عوض الرابط و الرابط أو في المثال السابق ثم جد مجموعة الحل :



مجموعة الحل للنظام:  $2X + 3 < 6$  أو  $5x + 11 < 1$

$$S_2 \cup S_1 = \{X: X < \frac{3}{2} \text{ أو } X < -2\}$$

$$S = \{X: X \in \mathbb{R}, X < \frac{3}{2}\}$$



نلاحظ أن العناصر الموجودة في  $S_1$  أو  $S_2$  أو في كليهما معاً هي  $S_2$

مثال ( 4 ) :

إذا كان ( R ) هو مجموعة التعويض جد مجموعة الحل للمتباينة  $|X-2| > 5$

الحل :

$$|X-2| = \begin{cases} X-2, & \forall X \geq 2 \\ \text{أو} \\ 2-X, & \forall X < 2 \end{cases}$$

$$\therefore 2-X > 5 \text{ أو } X-2 > 5 \Leftrightarrow |X-2| > 5$$

وبحل هذا النظام نجد أن مجموعة الحل المطلوبة هي :

$$S_1 \cup S_2 = \{X : X \in R, X > 7\} \cup \{X : X \in R, X < -3\}$$



مثال ( 5 ) :

حل المتباينة  $|x+1| \leq 2$  حيث  $x \in R$

الحل :

لاحظ ان هذه المتباينة يمكن حلها مباشرة حسب خاصية (7) ص 22  
فيكون  $|x+1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x+1 \leq 2$

بإضافة (-1) الى حدود المتباينة ينتج

$$-2+(-1) \leq x+1+(-1) \leq 2+(-1)$$

$$-3 \leq x \leq 1$$

$$\therefore s = [-3, 1]$$

## [ 6 - 2 ] حل متباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد

### مبرهنة

إذا كان ( a ) عدداً حقيقياً موجباً فإن :

(1) مجموعة حل المتباينة  $X^2 \leq a^2$  هي الفترة  $[-a, a]$

(2) مجموعة حل المتباينة  $X^2 < a^2$  هي الفترة  $(-a, a)$

**البرهان (2)**  $(X - a)(X + a) < 0 \iff X^2 - a^2 < 0 \iff X^2 < a^2$

ومن خواص الحقل المرتب نستنتج القاعدة : إذا كان  $a \cdot b > 0$  صفر فإن  
 } أما (  $a > 0$  و  $b < 0$  )  
 أو (  $a < 0$  و  $b > 0$  )

$[(X - a) < 0 \text{ و } (X + a) > 0]$  أو  $[(X - a) > 0 \text{ و } (X + a) < 0]$

$\implies [X < a \text{ و } X > -a]$  أو  $[X > a \text{ و } X < -a]$

$\implies (-a, a) \cup \emptyset = (-a, a)$

وبطريقة مماثلة يمكن برهنة (1) والتي نتركها للطالب .

مثال ( 6 ) :

إذا كان  $X^2 < 9$  فإن مجموعة الحل للمتباينة هي :

$(-3, 3)$  . وإذا كان  $X^2 \leq 9$  فإن مجموعة الحل للمتباينة هي  $[-3, 3]$

أما مجموعة حل المتباينة  $X^2 > 9$  فهي مجموعة حلول  $R / X^2 \leq 9$

أي  $R / [-3, 3]$

ومجموعة حلول المتباينة  $X^2 \geq 9$  هي مجموعة حلول المتباينة  $R / X^2 < 9$

أي  $S = R / (-3, 3)$

جد مجموعة حلول المتباينة :  $7 > |2X+5| \geq 5$

الحل :

$$|2X + 5| = \begin{cases} 2X + 5, & \forall X \geq \frac{-5}{2} \\ -(2X + 5), & \forall X < \frac{-5}{2} \end{cases}$$

إن المتباينة  $7 > |2X+5| \geq 5$  تكافئ النظام :

$$[7 > -(2X+5) \geq 5] \text{ أو } [7 > 2X + 5 \geq 5]$$

$$\Leftrightarrow [12 > -2X \geq 10] \text{ أو } [2 > 2X \geq 0]$$

$$\Leftrightarrow [-6 < X \leq -5] \text{ أو } [1 > X \geq 0]$$

مجموعة الحل =  $(-6, -5] \cup [0, 1)$

### الخلاصة

لحل المتباينة من الدرجة الاولى في متغير واحد:

\* نعرف المطلق ان وجد

\* نستخدم خواص حقل الاعداد الحقيقية:

(اضافة النظير الجمعي) ← خاصية التجميع ← العنصر المحايد على عملية الجمع (0)

← الضرب في النظير الضربي ← خاصية التجميع ← العنصر المحايد على عملية

الضرب ((1))

\* بعد هذه السلسلة من الخطوات نحصل على حل المتباينة ضمن مجموعة الاعداد الحقيقية R

## تمرينات (2-4)

س1 /

إذا كان  $A = [-2, 5)$

$B = \{ X: X \geq 1 \}$

جد  $A \cup B$  ،  $A \cap B$  ،  $A - B$  ،  $B - A$

س2 /

أ) ارسم الدالة  $Y = |X + 2| - 5$  (ب)  $y = 3 - |x + 1|$

س3 /

جد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية ثم تحقق من الحل :

أ)  $|4X + 3| = 1$  (هـ)  $x|x + 2| = 3$

ب)  $X|X| + 4 = 0$  (و)  $|2x + 1| = x$

ج)  $X^2 - 2|X| - 15 = 0$

د)  $|X^2 + 4| = 29$

س4 /

جد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين:

أ)  $X - Y = -1$  ،  $2X + Y = 4$  (بيانياً)

ب)  $2X + 3Y = 13$  ،  $4X + 3Y = 17$  (تحليلياً)

ج)  $5X^2 + 2Y^2 = 53$  ،  $X - Y = 1$

د)  $3X^2 + 2Y^2 = 107$  ،  $2X^2 - Y^2 = 34$

س5 /

جد مجموعة حلول كل من المتباينات الآتية :

أ)  $|X - 6| \leq 1$  (ب)  $2 \leq |X + 1| \leq 4$

ج)  $-9 < |2X - 3| - 12 \leq -3$  (د)  $2X^2 \leq 8$

هـ)  $3X^2 - 27 > 0$

[3-1] الأسس بأعداد صحيحة

[3-2] حل المعادلات الأسية البسيطة

[3-3] الجذور والعمليات عليها

[3-4] العددان المترافقان  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 

[3-5] الدوال الحقيقية

الاهداف السلوكية

ينبغي ان يصبح في نهاية دراسته لهذا الموضوع قادراً على ان:

- يتعرف على قوانين الاسس باعداد صحيحة
- يحل تمارين تحتوي على اسس
- يحل معادلات اسية بسيطة
- يتعرف على الجذور
- يحل اسئلة تحتوي على جذور
- يتعرف على العدد المرافق
- يتعرف على الدوال الحقيقية ويجد اوسع مجال للدالة
- يتعرف على سلوك الدالة الاسية
- يرسم الدالة الاسية
- يمثل بعض الدوال الحقيقية

الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
$a^x$	● الأسس
$\sqrt[n]{\quad}$	● الجذور
$f_a(x)=a^x$	● الدالة الأسية
$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	● العددان المترافقان



**مقدمة :** عرفت الرياضيات باركان ثلاثة هي :

1 ( الحساب

2 ( الجذر والمقابلة

3 ( الهندسة

ولم تعرف بشكلها المتكامل والمترايط إلا في نهاية القرن الثامن عشر وبداية القرن التاسع عشر . اكتشف علماء العرب والمسلمين الكثير من العلاقات بين الاركان الثلاثة من جهة وعلاقتها بالمنطق من جهة اخرى ومنهم :

\* عمر بن ابراهيم الخيامي ( 515 - 435 هـ ) = ( 1122 - 1044 م ) ولد وتوفى في نيسابور في ايران ومن اهم كتبه في الهندسة « رسالة في شرح ما شكل من مصادرات اقليدس » وفي الجبر كتابه « مقالة في الجبر والمقابلة » .

\* ابو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي ( 235 - 164 هـ ) = ( 850 - 781 م ) ولد في جنوب اقليم خوارزم ( اوزبكستان حالياً ) ثم انتقل الى بغداد ومن اشهر كتبه في الجبر « الجبر والمقابلة » كما انه اكتشف طرقاً جبرية لحل معادلات من الدرجة الاولى والثانية في متغير واحد او متغيرين .

تمهيد لما سبقت دراسته : درسنا في المرحلة المتوسطة كلاً من الأسس والجذور . حيث تعرفنا على قوة عدد عندما يكون الأس عدداً طبيعياً ، كما تعرفنا على الجذر التربيعي لعدد حقيقي غير سالب ، وعلى خصائص الجذور التربيعية والجذور التكعيبية .

## [ 1 - 3 ] الأسس أعداد صحيحة

### الأسس Indices

#### تعريف ( 1 - 3 )

- إذا كان  $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$  فان
- ( 1 )  $a^n = a \times a \times \dots \times a$  ( n مرة a مضروبة بنفسها )
  - ( 2 ) الحالة الخاصة  $a^0 = 1$
  - ( 3 )  $a^{-n} = (a^{-1})^n, a^{-1} = \frac{1}{a}, a \neq 0$

#### خصائص الأسس :

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{Z}$  ( مجموعة الأعداد الصحيحة )  $a \neq 0, b \neq 0$  فان :

$$( 1 ) a^n \times a^m = a^{m+n} \text{ [ عند الضرب تُجمع الاسس بشرط$$

تشابه الأساسات ]

$$( 2 ) a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$( 3 ) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ [ عند القسمة تطرح الاسس بشرط$$

تشابه الأساسات ]

$$( 4 ) (a^m)^n = a^{mn} \text{ [ قانون الرفع ]}$$

$$( 5 ) (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$( 6 ) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

#### ملاحظة :

نسمي الرمز  $a^n$  القوة النونية للعدد  $a$  ، ونسمي العدد  $a$  أساساً والعدد  $n$  أساً ، ونقول إن  $a$  مرفوع إلى الاس  $n$  .

### تعريف (2-3)

إذا كان  $a \in \mathbb{R}$  ،  $n \in \mathbb{N}$  ،  $n > 1$  فإن كل عدد حقيقي  $X$  يحقق المعادلة:  
 $X^n = a$  يسمى جذراً نونياً للعدد ( $a$ ) ويرمز له بالرمز  $\sqrt[n]{a}$  أو  $a^{\frac{1}{n}}$

وقد سبق ان استنتجنا من هذا التعريف النتائج الاتية :

$$\forall n \in \mathbb{N} , n > 1 , \sqrt[n]{0} = 0 \quad (1)$$

(2) إذا كان ( $n$ ) عدداً طبيعياً زوجياً وكان ( $a$ ) عدداً حقيقياً موجباً فان كلا من العددين

$$X = \sqrt[n]{a} , X = -\sqrt[n]{a} \quad \text{يحقق المعادلة } X^n = a$$

(3) إذا كان ( $n$ ) عدداً طبيعياً زوجياً وكان ( $a$ ) عدداً حقيقياً سالباً فانه لا يوجد عدد حقيقي

$$\text{يحقق المعادلة } X^n = a \quad (\forall X \in \mathbb{R} \text{ موجب } X^n = a \text{ لان } X^n = a \text{ موجب})$$

(4) إذا كان ( $n$ ) عدداً طبيعياً فردياً وكان ( $a$ ) عدداً حقيقياً فانه يوجد عدد حقيقي واحد

$$\text{يحقق المعادلة } X^n = a$$



### مبرهنة (1-3)

إذا كان  $a, b \in \mathbb{R}$  ،  $n \in \mathbb{N}$  ،  $n > 1$  فان

$$(1) \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \text{حيث } a \geq 0 , b \geq 0 \text{ اذا كان } (n) \text{ عدداً زوجياً}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \begin{cases} 0 < b , 0 \leq a & \text{اذا كان } n \text{ عدداً زوجياً} \\ b \in \mathbb{R} / \{0\} , a \in \mathbb{R} & \text{اذا كان } n \text{ عدداً فردياً} \end{cases}$$

ملاحظة :

$$(-a)^m = a^m \text{ ... اذا كان } m$$

عدداً زوجياً.

$$-a^m \text{ ... اذا كان } m \text{ عدداً فردياً.}$$

$$(-1)^{25} = -1$$

$$(-1)^{64} = 1$$

مثل

مثال (1) :

$$\frac{8^{-3} \times 18^2}{81 \times 16^{-2}} \text{ جد قيمة}$$

الحل :

$$\frac{8^{-3} \times 18^2}{81 \times 16^{-2}} = \frac{(2^3)^{-3} \times (3^2 \times 2)^2}{3^4 \times (2^4)^{-2}} = \frac{2^{-9} \times 2^2 \times 3^4}{3^4 \times 2^{-8}}$$

$$3^{4-4} \times 2^{-9+2+8} = 3^0 \times 2^1 = 1 \times 2 = 2$$

مثال (2) :

اذا كان  $m, n \in \mathbb{Z}$  فاثبت ان:

$$\frac{125 \times 15^{m-2} \times 25^{m+n}}{75^m \times 5^{2n+m}} = \frac{5}{9}$$

الحل :

$$\frac{125 \times 15^{m-2} \times 25^{m+n}}{75^m \times 5^{2n+m}} = \frac{5^3 \times (5 \times 3)^{m-2} \times (5^2)^{m+n}}{(3 \times 5^2)^m \times 5^{2n+m}} = \text{الطرف الايسر}$$

$$\frac{5^3 \times 5^{m-2} \times 3^{m-2} \times 5^{2m+2n}}{3^m \times 5^{2m} \times 5^{2n+m}} =$$

$$5^{3+m-2+2m+2n-2m-2n-m} \times 3^{m-2-m} =$$

$$= 5 \times 3^{-2} = 5 \times \frac{1}{3^2} = \frac{5}{9} = \text{الطرف الايمن}$$

## تمرينات (3-1)

س1 /

جد ناتج مايلي:

$$\begin{array}{llll}
 \sqrt[3]{\sqrt{64}} \text{ (د)} & 16 + (16)^{-1} \text{ (ج)} & (3)^1 + (2)^{-1} \text{ (ب)} & (9)^0 + (8)^0 \text{ (أ)} \\
 (a \neq 0), 3a^0 \text{ (ح)} & (\sqrt{27})^{\frac{5}{3}} \text{ (ز)} & \frac{10^3 \times 4^7}{10^{-5} \times 2^5} \text{ (و)} & \frac{2^{-3} \times 4^{-5}}{6^{-1} \times 3^3} \text{ (هـ)} \\
 (\sqrt[5]{-32})^{-3} \text{ (ك)} & (a+b \neq 0), (a+b)^0 \text{ (ي)} & & (3a)^0 \text{ (ط)}
 \end{array}$$

س2 /

اكتب المقادير الاتية باسطة صورة :

$$\begin{array}{ll}
 (-a)^4 \left[ \frac{(-a)^3 \sqrt[6]{729}}{3a} \right]^2 \text{ (ب)} & \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{20a^3}{45a}} \text{ (أ)} \\
 \frac{3x^{-5} \cdot y^2}{2^{-1} y^{-2}}, x \neq 0 \text{ (د)} & c \neq 0, \sqrt{25b^2 c^{-8}} \text{ (ج)}
 \end{array}$$

س3 /

اكتب كلاً من العبارات الاتية بشكل يكون المقام فيها ( 1 ) ولا يكون تحت الجذر مستخدماً

الاسس :

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt[5]{x} \text{ (ج)} & \frac{1}{b^5}, b \neq 0 \text{ (ب)} & \frac{bc}{d}, d \neq 0 \text{ (أ)} \\
 \sqrt[3]{x} \times \sqrt[4]{x}, x \geq 0 \text{ (و)} & \frac{1}{b^2 + c^2} \text{ (هـ)} & \frac{4b^2}{b^2 c^{-3}}, b \neq 0 \text{ (د)}
 \end{array}$$

س4 /

إذا كان  $a \in \mathbb{R}$  و  $m$  عدداً صحيحاً زوجياً فاي مما يأتي صائبة؟

(أ)  $a^m > 0$  (ب)  $a^m < 0$  (ج)  $a^m \geq 0$  (د)  $a^m \leq 0$

س5 /

إذا كان  $a \in \mathbb{R}$  ،  $a$  عدد سالب ، و  $m$  عدداً صحيحاً فردياً فاي مما يأتي صائبة؟

(أ)  $a^m > 0$  (ب)  $a^m < 0$  (ج)  $a^m \geq 0$  (د)  $a^m \leq 0$

س6 /

برهن ان : (أ)  $a^{(x-y)z} \cdot a^{(z-x)y} \cdot a^{(y-z)x} = 1$

(ب)  $\left[ x^{n^2-1} \div x^{n-1} \right]^{\frac{1}{n}} = x^{n-1}$

س7 /

برهن ان :  $\frac{1}{1+a^{c-b}} + \frac{1}{1+a^{b-c}} = 1$

س8 /

اثبت ان :  $\frac{5 \times 3^{2n} - 4 \times 3^{2n-1}}{2 \times 3^{2n+1} - 3^{2n}} = \frac{11}{15}$

س9 /

اختصر كلاً مما يأتي الى أبسط صورة :

$$\frac{6^{4n-1} \times 27^{2n}}{2^{n+1} \times 8^{n-1} \times 9^{n+2}} \cdot \frac{3^{2+n} + 3^{n+1}}{3^n - 3^{n-1}}$$

س10 /

برهن ان :  $\left[ \frac{(9^{n+\frac{1}{4}}) \times \sqrt{3 \times 3^n}}{3\sqrt{3^{-n}}} \right]^n = 27$

## [ 2 - 3 ] حل المعادلات الاسية البسيطة

تتضمن المعادلة الاسية Exponential Equation متغير في الاس. ولحل هذا النوع من المعادلات ندرج الملاحظات الاتية:

(1) في اي معادلة: (( اذا تساوت الاساسات فسوف تتساوي الاس بشرط الاساس  $\neq 1$  ))

$$a^x = a^y \Rightarrow x = y, a \neq 1 \quad \text{اي : اذا كان}$$

(2) اذا كان  $x^n = y^n$  فان  $x = y$  اذا كانت  $n$  فردية

اذا كانت  $n$  زوجية  $x = \pm y$

(3) اذا كان  $x^n = y^m$   $\Leftarrow m = n$  صفر

و الان لاحظ حل كلا من المعادلات الاتية :

$$(x + 2)^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{27}} \Rightarrow (x + 2)^{-\frac{3}{5}} = 3^{-\frac{3}{5}} \quad (\text{أ})$$

$$x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$$

∴ مج = {1}

$$x^{\frac{2}{3}} = 3^{-2}$$

(ب)

$$x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3^2}$$

$$(x^{\frac{1}{3}})^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

بجذر الطرفين

$$x^{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{3}$$

بتكعيب الطرفين

$$(x^{\frac{1}{3}})^3 = \pm \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$x = \pm \frac{1}{3^3}$$

$$x = \pm \frac{1}{27}$$

∴ مج =  $\left\{ \pm \frac{1}{27} \right\}$

مثال ( 3 ) :

حل المعادلة :  $2^{x^2-2x+1} = 4^{x+3}$

الحل :

نجعل الاساس نفسه في طرفي المعادلة  $2^{x^2-2x+1} = 2^{2(x+3)}$

$$x^2 - 2x + 1 = 2x + 6 \therefore$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -1$$

$$\therefore \text{مجموعة الحلول} = \{-1, 5\}$$

وتسمى مثل هذه المعادلة المعادلة الاسية لان الاس متغيرة.

مثال ( 4 ) :

حل المعادلة :  $3^{2x+1} - 4 \times 3^{x+2} = -81$

الحل :

$$3^{2x} \times 3 - 4 \times 3^x \times 3^2 + 81 = 0 \div 3$$

$$3^{2x} - 12 \times 3^x + 27 = 0$$

$$(3^x - 3)(3^x - 9) = 0$$

$$\text{اما } 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{او } 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$\therefore \text{مجموعة الحلول} = \{1, 2\}$$



مثال (5) :

جد قيمة x اذا كان :-

$$3^{x-1} = 5^{x-1} \quad (\text{أ})$$

$$(x+3)^5 = 4^5 \quad (\text{ب})$$

$$(x-1)^6 = 2^6 \quad (\text{ج})$$

الحل :

(أ) بتطبيق ملاحظة 3

$$3^{x-1} = 5^{x-1} \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

(ب) بتطبيق ملاحظة 2

$$(x+3)^5 = 4^5 \Rightarrow x+3 = 4 \Rightarrow x = 1$$

(ج) بتطبيق ملاحظة 2

$$(x-1)^6 = 2^6 \Rightarrow x-1 = \pm 2 \Rightarrow x = 3$$

$$x = -1$$

مثال (6) :

حل المعادلة في R حيث

$$8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x+1}{3}} + 8^{\frac{x+2}{3}} = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{x}{2}} \times 8^{\frac{2}{3}} = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}} \left( 1 + 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{2}{3}} \right) = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}} (1 + 2 + 4) = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}} \times 7 = 14 \Rightarrow 8^{\frac{x}{2}} = 2 \Rightarrow (2^3)^{\frac{x}{2}} = 2 \Rightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^1 \Rightarrow \frac{3x}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

## تمرينات ( 2 - 3 )

س 1 /

حل كلاً من المعادلات الآتية:

$$\sqrt[5]{x^3} = \frac{1}{27} \quad (\text{أ}) \quad (x^{-\frac{1}{2}})^2 = (\sqrt[5]{243})^2 \quad (\text{ب}) \quad (x+2)^{\frac{1}{2}} = 3 \quad (\text{ج})$$

$$10^{(x-4)(x-5)} = 100 \quad (\text{د}) \quad -6 \times 5^x + 25^x + 5 = 0 \quad (\text{هـ}) \quad 6^{x^2-3x-2} = 36 \quad (\text{و})$$

$$3^{(x^2+5x+4)} = 27^{(-x-4)} \quad (\text{ز}) \quad 2^{2x+3} - 57 = 65(2^x - 1) \quad (\text{ح}) \quad 5(5^x + 5^{-x}) = 26 \quad (\text{ط})$$

س 2 /

حل المعادلة في R حيث  $3^{x+1} \times 9^x - 9^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{x}} = 0$

س 3 /

حل المعادلة الآتية:

$$\frac{(243)^{x-1} \times (27)^{x-2}}{(729)^{\frac{1}{2}x}} = 81$$

س 4 /

جد قيمة  $x \in R$  اذا علمت :

$$3^{x^2-1} + 3^{x^2} + 3^{x^2+1} = 39 \quad (\text{أ})$$

$$\frac{4^x + 4(2^x) + 3}{4^x + 2^x} = 25 \quad (\text{ب})$$

### [ 3 - 3 ] الجذور والعمليات عليها

بعض الجذور هي كميات لا يمكن ايجاد قيمها بصورة مضبوطة مثل:

$$\sqrt{2} , \sqrt[3]{10} , \sqrt[5]{61}$$

تدعى هذه الجذور بالجذور الصماء وسنعطي بعض الخواص لتسهيل عملية تبسيطها .

#### الخواص

1.  $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$  وعكس الخاصية صحيح .

$$\sqrt[5]{6} \times \sqrt[5]{12} = \sqrt[5]{72} \quad \text{مثلاً:}$$

$$\sqrt[4]{5} \sqrt[4]{3} \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{15x^3}$$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad \text{وعكس الخاصية صحيح حيث } y \neq 0$$

$$\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{21}{3}} = \sqrt{7} \quad \text{مثلاً:}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3x}{2y}} = \frac{\sqrt[3]{3x}}{\sqrt[3]{2y}}$$

مثال ( 7 ) :

رتب الجذور الآتية تصاعدياً:

$$\sqrt[6]{147} , \sqrt{5} , \sqrt[3]{12}$$

الحل :

$$\sqrt[3]{12} = \sqrt[6]{12^2} = \sqrt[6]{144}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$$

$$\sqrt[6]{147} = \sqrt[6]{147}$$

الترتيب يكون :  $\sqrt[6]{147}$  ،  $\sqrt[3]{12}$  ،  $\sqrt{5}$

## Conjugate Numbers $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ المترافقان [ 3 - 4 ]

نعلم ان العامل المنسب هو الذي لو ضربت به الكمية غير النسبية لتحولت الى كمية نسبية .

فالعامل المنسب للمقدار  $2\sqrt{3}$  هو  $\sqrt{3}$  لأن  $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2 \times 3 = 6$

والعامل المنسب للمقدار  $\sqrt[3]{3}$  هو  $\sqrt[3]{3^2}$  لأن  $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

والعامل المنسب للمقدار  $5 + \sqrt{6}$  هو مرافقه  $5 - \sqrt{6}$

لان ضربهما  $(5 - \sqrt{6})(5 + \sqrt{6}) = 25 - 6 = 19$

والعامل المنسب للمقدار  $3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$  هو  $3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$

لان  $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) = 9 \times 2 - 4 \times 5 = -2$

والعامل المنسب للمقدار  $\sqrt[3]{5} - 1$  هو  $\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1$

لان  $(\sqrt[3]{5} - 1)(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1) = \sqrt[3]{125} - 1 = 5 - 1 = 4$

( فرق بين مكعبين )

مثال ( 8 ) :

بسط بحيث يكون المقام كمية نسبية:

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

الحل :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \\ & = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} + \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} \\ & = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2 - \sqrt{3} = 3 \end{aligned}$$

درسنا سابقا التطبيق وعرفنا انه يتكون من: مجال، مجال مقابل وقاعدة اقتران. والان سنوضح مفهوم الدالة التي هي تطبيق ايضاً مجالها ومجالها المقابل مجموعة جزئية غير خالية من R. تكتب بشكل:

$$f: A \rightarrow B \text{ يعني } \forall x \in A, \exists y \in B, y = f(x) \text{ حيث ان } A, B \subseteq \mathbb{R}$$

### [ 3 - 5 - 1 ] ايجاد اوسع مجال للدوال الحقيقية

سندرس هنا اربعة انواع من الدوال هي: الدالة كثيرة الحدود، الدالة الكسرية، الدالة الجذرية، الدالة الاسية حيث المجال يختلف من دالة الى اخرى

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad * \text{ الدالة كثيرة الحدود وتكتب بالشكل:}$$

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$$

وتشمل الدالة الخطية مثل:  $f(x) = 3x - 1$ ، الدالة التربيعية مثل:  $g(x) = x^2 - 5x + 9$ ، والدالة التكعيبية مثل:  $h(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$

اوسع مجال للدوال كثيرة الحدود يساوي R

مثلاً:  $f(x) = 3x - 1$ ،  $g(x) = x^2 - 5x + 9$ ،  $h(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$  اوسع مجال لها يساوي R. \* الدالة الكسرية: لايجاد مجال هذا النوع من الدوال نجعل المقام = صفراً ونجد قيم x

فيكون اوسع مجال للدالة {قيم x}  $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ . مثلاً:

$$1) f(x) = \frac{2x-1}{x+5} \text{ نجعل } x+5=0 \Rightarrow x=-5 \quad \mathbb{R} \setminus \{-5\} \text{ اوسع مجال للدالة}$$

$$2) g(x) = \frac{2}{x^2-4} \text{ نجعل } x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2 \quad \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\} \text{ اوسع مجال للدالة}$$

$$3) h(x) = \frac{x+7}{x^2-3x} \text{ نجعل } x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0, x=3$$

اوسع مجال للدالة  $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$

\* الدالة الجذرية (دليل الجذر زوجي): لايجاد مجال الدالة نجد جميع قيم x الحقيقية التي تجعل داخل الجذر اكبر او يساوي صفراً مثلاً:

$$1) f(x) = \sqrt{x-7}, x-7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7 \quad \{x \in \mathbb{R}: x \geq 7\} \text{ اوسع مجال للدالة}$$

$$2) g(x) = \sqrt{3x+5}, 3x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{3} \quad \{x \in \mathbb{R}: x \geq -\frac{5}{3}\} \text{ اوسع مجال للدالة}$$

$$3) h(x) = \sqrt{1-2x}, 1-2x \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \quad \{x \in \mathbb{R}: x \leq \frac{1}{2}\} \text{ اوسع مجال للدالة}$$

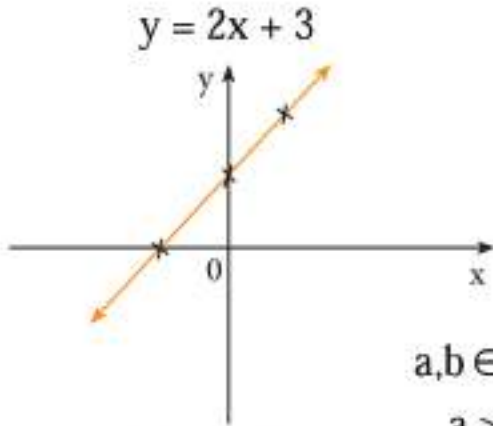
\* الدالة الاسية  $f_a(x) = a^x$  حيث  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ،  $x \in \mathbb{R}$  حيث a هو الاساس، x يمثل الاس

من الامثلة على الدالة الاسية:  $f_2(x) = 2^x$ ،  $f_3(x) = 3^x$ ،  $h_{\sqrt{5}}(x) = (\sqrt{5})^x$ ،  $f_{\frac{1}{2}}(x) = (\frac{1}{2})^x$  ملاحظة:  $f(x) = 1^x = 1$  وهذه دالة ثابتة وهذا ما جعلنا نستبعد  $a=1$  في الدالة الاسية

## [ 2 - 5 - 3 ] التمثيل البياني للدوال الحقيقية

أولاً: تمثيل الدالة الخطية حيث  $f(x) = ax + b$  ,  $a, b \in \mathbb{R}$  ,  $a \neq 0$

مثال: مثل الدالة  $f(x) = 2x + 3$  ,  $\forall x \in \mathbb{R}$



x	1	0	-1
y	5	3	1

لاحظ ان هذه الدالة تمثل خط مستقيم

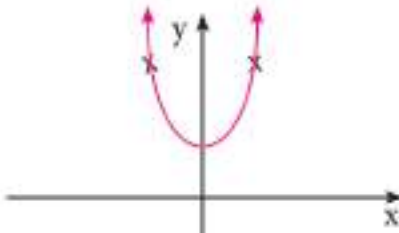
ثانياً: تمثيل الدالة التربيعية  $f(x) = ax^2 + b$  ,  $a, b \in \mathbb{R}$  ,  $a \neq 0$

مثال: مثل الدالة  $f(x) = 2x^2 + 3$  اي عندما  $a > 0$  ,  $b \geq 0$

x	-1	0	1
y	5	3	5

لاحظ ان شكل الدالة هو  $\cup$

وتمثيلها البياني يقع في النصف الاعلى من المستوي الاحداثي

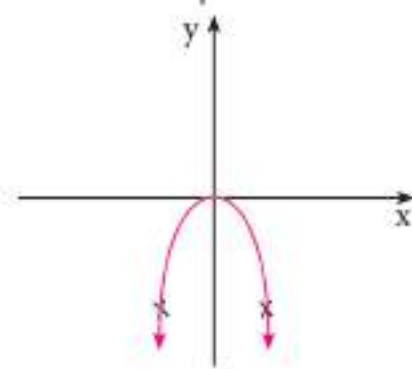


مثال: مثل الدالة  $f(x) = -4x^2$  اي عندما  $a < 0$

x	1	0	-1
y	-4	0	-4

لاحظ ان شكل الدالة هو  $\cap$

وتمثيلها البياني يقع في النصف الاسفل من المستوي الاحداثي



ثالثاً: تمثيل الدالة التكعيبية

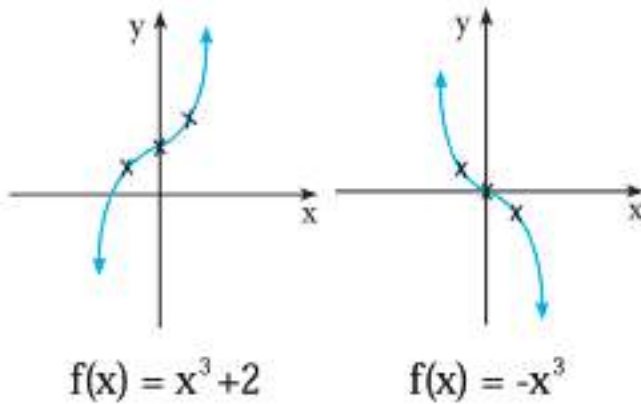
$a, b \in \mathbb{R}$  ,  $a \neq 0$  ,  $f(x) = ax^3 + b$

مثال: مثل الدالة:  $f(x) = x^3 + 2$

x	1	0	-1
y	3	2	1

مثال: مثل الدالة  $f(x) = -x^3$

x	1	0	-1
y	-1	0	1



$$f(x) = x^3 + 2$$

$$f(x) = -x^3$$

رابعاً: تمثيل الدالة الاسية  $f_a(x)=a^x$

مثال:

أ) جد قيم الدالة  $f(x) = 2^x$  من اجل  $x = 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$  ثم استفد من ذلك في رسم جزء من منحنى هذه الدالة.

ب) ابحث عن طريقة للافادة من المنحنى السابق في رسم جزء من منحنى هذه الدالة:  $f_1(x) = \frac{1}{2^x}$  على الشكل نفسه.

الحل:

$$f(x) = 2^x \text{ ( أ )}$$

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
$2^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

ب)  $g(x) = f_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x} = f(-x)$  ولنفرض  $R_y$  تناظر بالنسبة لمحور الصادات  $R_y : (x, y) = (-x, y)$  اي ان صورة

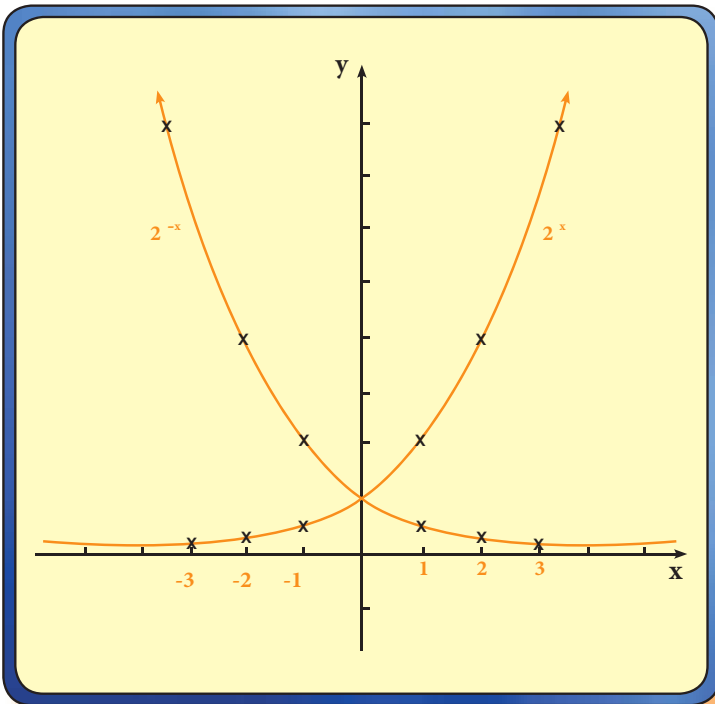
$(x, 2^x) = (-x, 2^x)$  لذلك فاننا

نحصل على منحنى لدالة  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

من المنحنى  $f(x) = 2^x$  بالتناظر حول

محور الصادات كما موضح في

الشكل (1 - 3)



الشكل (1 - 3)

## بعض خصائص الدالة الأسية $f(x) = a^x$ :

1. اذا قمنا برسم منحنيات الدوال :

$$2^x, 3^x, 4^x, 5^x, \dots$$

وكذلك الدوال :  $(\frac{1}{2})^x, (\frac{1}{3})^x, (\frac{1}{4})^x, (\frac{1}{5})^x, \dots$

فسوف نجد مجموعتين من المنحنيات:

**الاولى :** عندما  $a > 1$  حيث تتزايد قيم الدالة  $a^x$  كلما تزايدت قيمة  $x$ .

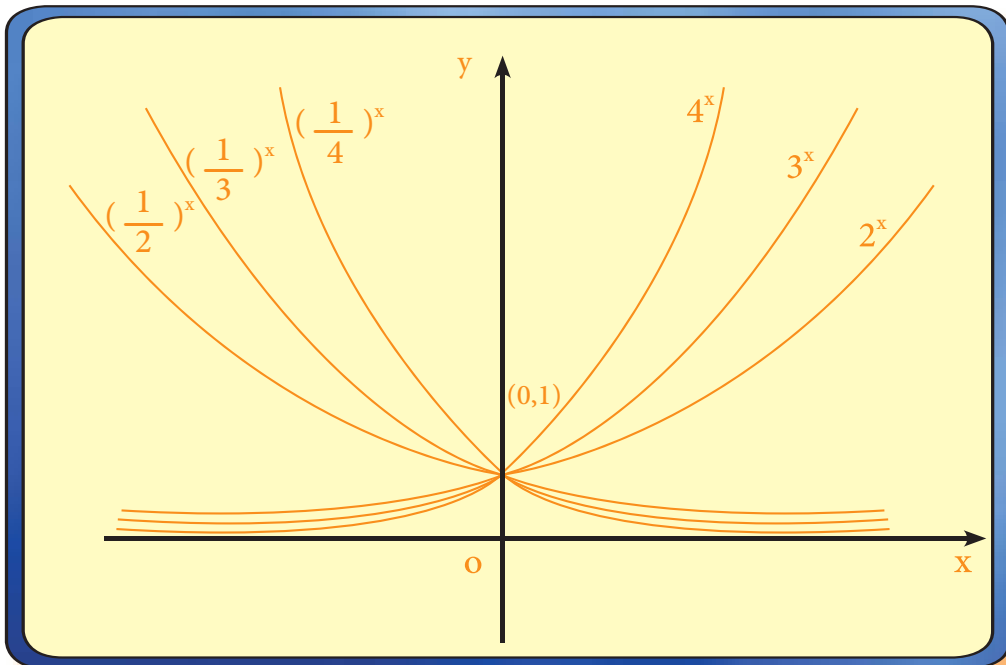
**الثانية :** عندما  $0 < a < 1$  حيث تتناقص قيم الدالة  $a^x$  كلما تزايدت قيمة  $x$ .

وقد رسمنا في الشكل ( 2 - 3 ) ستة من هذه المنحنيات ( رسم جزء من كل منحنى )

ثلاثة فيها  $a > 1$  وثلاثة منها اخرى فيها  $0 < a < 1$  وقد اخترنا قيم  $a$  في هذه الاخيرة مقلوبات

قيم  $a$  في الثلاثة الاولى ونلاحظ ان جميع هذه المنحنيات تمر بالنقطة  $(0, 1)$

2. بالرجوع الى المنحني البياني لأية دالة اسية  $a^x$  ،  $a \neq 0$  نجد ان مجالها  $R$ .



الشكل ( 2 - 3 )



س1 / أ) اختصر  $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b} \left[ \frac{\sqrt{a + b}}{\sqrt{a - b}} - \frac{\sqrt{a - b}}{\sqrt{a + b}} \right]^4$  ب) اذا كان  $y = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$

$x = \sqrt[3]{2} + 1$

فاثبت ان  $xy = 3$

س2 / مثل بيانياً الدوال التالية:

a)  $f(x) = -4x^2 + 5$     b)  $f(x) = x - 8$     c)  $f(x) = 2 - x^3$

س3 / جد اوسع مجال للدوال التالية:

a)  $f(x) = x^2 - 5x + 9$     b)  $f(x) = \frac{x-1}{x+9}$     c)  $f(x) = \sqrt{x-9}$

d)  $f(x) = \sqrt{3-5x}$     e)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

س4 / اوجد ناتج مايلي بحيث يكون المقام كمية نسبية:

أ)  $\text{Ans} : \frac{a-b}{x} \quad \frac{3}{a-b} \cdot \sqrt{\frac{2x}{a-b}} \div \sqrt{\frac{18x^3}{(a-b)^5}}$

ب)  $\text{Ans} : \frac{5}{24} \quad \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{8}{27}}}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}})}$

ج)  $\text{Ans} : 1 \quad \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$

س5 / أ) اثبت ان

ب) جد  $x$  بصورة  $a + \sqrt{3}b$  اذا كانت  $x + \sqrt{3}x = 8$   $\frac{-15}{x-6+\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x-2}} - \frac{3}{\sqrt{x+3}} = 0$

س6 / ارسم جزءاً من المنحني البياني للدالة:  $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

- [4-1] الزاوية الموجهة بالوضع القياسي
- [4-2] القياس الستيني والقياس الدائري للزوايا
- [4-3] العلاقة بين القياس الستيني والدائري للزوايا
- [4-4] النسبة المثلثية لزاوية حادة وبعض العلاقات الاساسية
- [4-5] النسب المثلثية لزاوية خاصة
- [4-6] دائرة الوحدة والنقطة المثلثية
- [4-7] التطبيقات الدائرية
- [4-8] استخدام الحاسوب في ايجاد قيم التطبيقات الدائرية
- [4-9] حل المثلث القائم الزاوية

### الاهداف السلوكية

ينبغي بعد دراسة هذا الفصل يكون الطالب قادراً على ان:

- يتعرف على الزاوية الموجهة
- يتعرف على النظام الستيني والنظام الدائري
- يميز بين النظامين
- يتعرف على النسب المثلثية
- يتعرف على بعض العلاقات الاساسية
- يتعرف على النسب المثلثية للزوايا الخاصة
- يحل مسائل تعتمد على النسب المثلثية
- يتعرف على دائرة الوحدة
- يتعرف على النقطة المثلثية
- يستخدم الحاسوب في بعض العمليات الرياضية
- يحل المثلث القائم الزاوية

الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
$(\vec{BA}, \vec{BC})$	* الزاوية الموجهة
$D^\circ, Q$	* التقدير الستيني والدائري
$\sin x$	* جيب الزاوية $x$
$\cos x$	* جيب تمام الزاوية $x$
$\tan x$	* ظل الزاوية $x$
$(\cos x, \sin x)$	* النقطة المثلثية

## الفصل الرابع : حساب المثلث Trigonometry :

**مقدمة :** ان للمسلمين الفضل الكبير في تعديل وجمع ما تشتت من علم المثلثات من كتب الاغريق . فكان للبابليين والمصريين والهنود والصينيين واليونانيين اشارات واضحة في هذا العلم. ومن العلماء المسلمين الذين اسهموا في هذا المجال :

\* البيروني (440 - 362هـ) = (1048 - 973م) : هو ابو الريحان محمد بن احمد الفلكي عربي من اصل فارسي ولد في كاث بخوارزم وتوفي في غزنة بافغانستان وله نظرية لاستخراج محيط الارض في كتابه الاسطرلاب وتسمى قانون البيروني وتنص على ان:  $r = \frac{b \cos x}{a - \cos x}$  حيث r: نصف قطر الارض ، a : ارتفاع قمة جبل ، b : الارتفاع المرصود ، x : زاوية الانحدار عن الافق

\* البوزجاني : (388 - 328هـ) = (988 - 940م) : هو محمد بن محمد يحيى بن اسماعيل بن العباس أبو الوفاء ، ولد في مدينة بوزجان وفي عام 959 م أنتقل الى بغداد . وهو اول من وضع النسبة المثلثية واستعمالها في حل المسائل الرياضية ووضع المعادلات الاتية :

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} , 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$
$$\sin(x+y) = \sqrt{\sin^2 x - \sin^2 y} \sin y + \sqrt{\sin^2 y - \sin^2 x} \sin x$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} , \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\sec x = \sqrt{1 + \tan^2 x} , \csc x = \sqrt{1 + \cot^2 x}$$

\* الكاشي (899 هـ) = (1492م) هو غياث الدين جمشيد بن مسعود بن محمود بن الكاشي ولد في مدينة كاشان بايران وتوفى في سمرقند ، يعتبر عالم رياضي ممتاز حيث تنسب اليه النسبة التقريبية «  $\pi$  » التي وردت في كتابه (الرسالة المحيطة) حيث اعطى  $2\pi$  صحيحة لخمسة عشر رقماً عشرياً ،  $2\pi = 6.28318571795865$

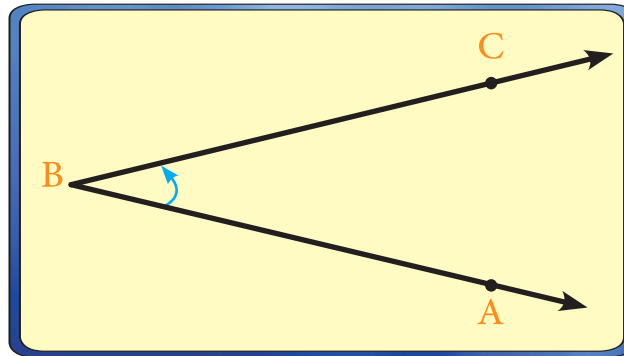
ومن مؤلفاته «مفتاح الحساب» والذي حوى على : الحساب ، الهندسة ، المساحات ، الجيب والوتر، استخراج جيب الدرجة الاولى وغيرها ....)

وقد تطور علم المثلثات في القرن السابع عشر على يد العالم الاسكتلندي جون ناير (1617 - 1550 م) ولعلم المثلثات استخدامات كثيرة في الملاحة والمساحة والجغرافية والفيزياء وكثير من فروع الهندسة وفي هذا الفصل سنعطي المبادئ الاساسية لموضوع المثلثات .

## [ 4 - 1 ] الزاوية الموجهة بالوضع القياسي :

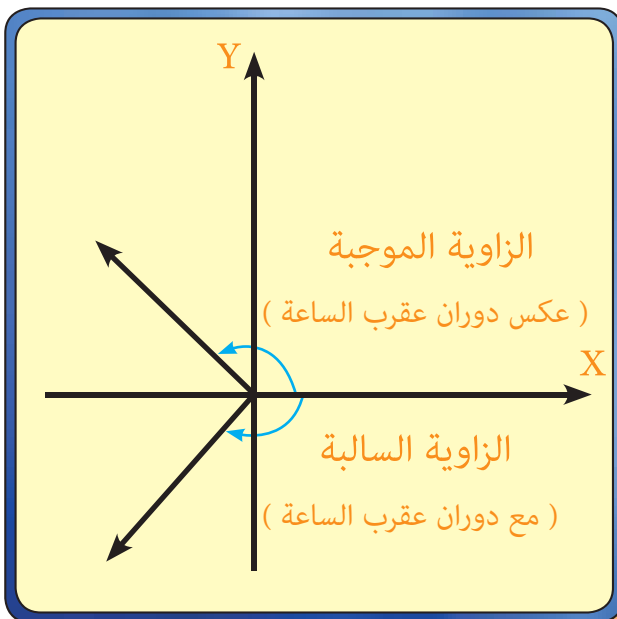
### تعريف ( 4 - 1 )

الزاوية الموجهة **Directed Angle** : اذا كان للشعاعين  $\vec{BA}$  ،  $\vec{BC}$  نقطة بداية مشتركة هي B فان الزوج المرتب  $(\vec{BA}, \vec{BC})$  يسمى الزاوية الموجهة التي ضلعها الابتدائي  $\vec{BA}$  وضلعها النهائي  $\vec{BC}$  ورأسها النقطة B وتكتب باحدى الطريقتين  $(\vec{BA}, \vec{BC})$  أو  $\angle ABC$  .

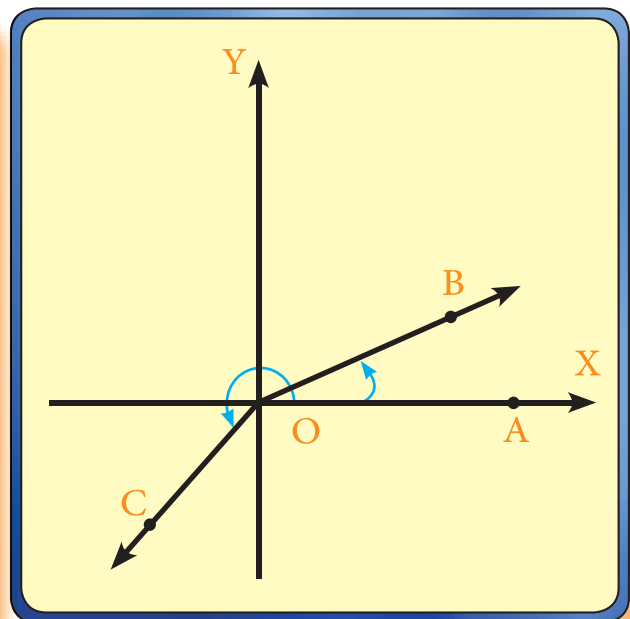


### تعريف ( 4 - 2 )

الزاوية الموجهة بالوضع القياسي : اذا كان لدينا نظام احداثي متعامد المحورين في المستوي وزاوية موجهة في المستوي فيقال ان الزاوية الموجهة في وضع قياسي اذا وقع رأسها في نقطة الأصل وانطبق ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات كما في الشكل ( 4 - 1 ) .



الشكل ( 4 - 2 )



الشكل ( 4 - 1 )

## [ 2 - 4 ] القياس الستيني والقياس الدائري للزوايا :

القياس الستيني Degree Measure : تعلمنا من المرحلة المتوسطة انه:

اذا قسمنا دائرة على 360 قسماً متساوياً فاننا نحصل على 360 قوساً متساوية كل قوس منها يقابل زاوية مركزية في هذه الدائرة قياسها يسمى درجة في التقدير الستيني ويرمز له بالرمز  $1^\circ$  كما ان :  $1^\circ = 60$  دقيقة ، 1 دقيقة =  $60''$  ثانية أي ان  $1^\circ = 60' = 3600''$

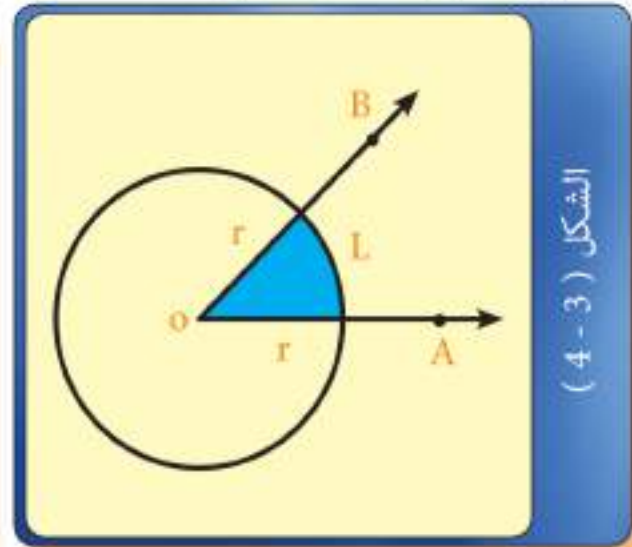
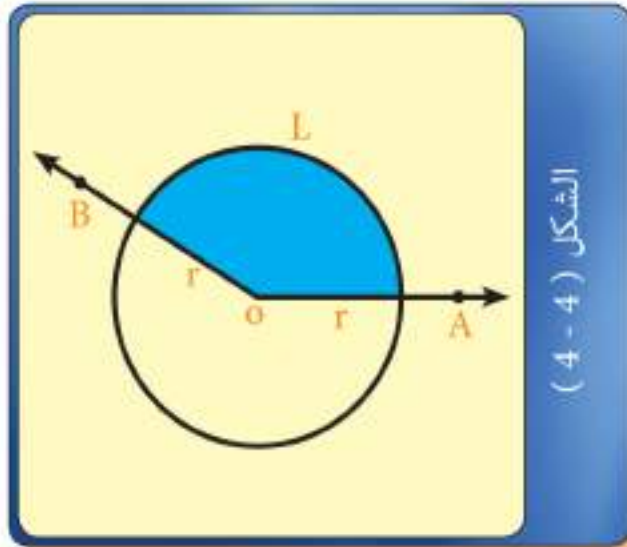
القياس الدائري Radian Measure : يوجد نظام اخر لقياس الزوايا يسمى القياس الدائري للزوايا.

### تعريف (3 - 4)

وحدة قياس الزوايا بالتقدير الدائري هي الزاوية نصف القطرية وهي قياس للزاوية التي وضع رأسها في مركز دائرة وقابلها قوس Arc طوله مساو لنصف قطر تلك الدائرة .

ففي الشكل ( 3 - 4 ) اذا فرضنا ان طول القوس المقابل للزاوية المركزية A O B يساوي (L) وحدة طول نصف قطر الدائرة  $r =$  وحدة طول وكان  $L = r$  فان  $m < A O B$  بالتقدير الدائري = 1 زاوية نصف قطرية .

واذا كان  $L = 2r$  كما في الشكل ( 4 - 4 ) فان  $m < A O B$  بالتقدير الدائري = 2 من الزوايا نصف القطرية .



ومن تعريف ( 3 - 4 ) ينتج ان طول قوس الدائرة التي نصف قطرها r هو :

$L = | Q | \cdot r$  حيث | Q | قياس الزاوية المركزية المقابلة لذلك القوس مقدراً بالتقدير الدائري.

$$| Q | = \frac{L}{r} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{نصف القطر}} \text{ أو}$$

### [ 3 - 4 ] العلاقة بين القياس الستيني والدائري للزوايا :

تعلمنا سابقاً ان محيط الدائرة =  $2\pi r$

$$| Q | = \frac{L}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \quad \text{وبما ان}$$

وبما ان  $2\pi$  زاوية نصف قطرية =  $360^\circ$

$\pi$  .° زاوية نصف قطرية =  $180^\circ$

$$\leftarrow 1 \text{ زاوية نصف قطرية} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\leftarrow 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ زاوية نصف قطرية .}$$

**بصورة عامة : أ )** اذا كان قياس زاوية موجهة =  $Q$  زاوية نصف قطرية

$$\text{فإن } Q \text{ زاوية نصف قطرية} = \frac{D^\circ \times \pi}{180^\circ}$$

**ب )** اذا كان قياس زاوية موجهة =  $D^\circ$  فإن :

$$D^\circ = \left( \frac{180^\circ}{\pi} \times Q \right) \text{ زاوية نصف قطرية :}$$

$$\text{ومنه نستنتج ان : } \frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

وتستخدم هذه العلاقة لتحويل قياس الزاوية من التقدير الدائري الى الستيني وبالعكس .

مثال (1) :

إذا كانت  $\angle AOB <$  في وضع قياسي تقابل قوساً طوله 10cm في دائرة طول نصف قطرها 12cm .

(أ) احسب بالتقدير الدائري  $\angle AOB < m$  حيث :

$0 \leq \angle AOB < 2\pi$  علماً ان مركز الدائرة هو نقطة الاصل.

(ب) احسب بالتقدير الدائري  $\angle AOB < m$  حيث :

$$0 \geq m < \angle AOB > -2\pi$$

الحل :

$$L = 10 \text{ cm} , r = 12 \text{ cm}$$

$$(أ) \therefore \text{زاوية نصف قطرية} \quad |Q| = \frac{L}{r} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0.833$$

(ب) في هذه الحالة يكون قياس الزاوية سالباً ويكون :

$$|Q| = \frac{L}{r} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0.833$$

$\therefore Q = -0.833$  زاوية نصف قطرية (لان الزاوية سالبة).

مثال (2) :

إذا كانت  $\angle AOB <$  في وضعها القياسي وكان قياسها  $\frac{3\pi}{4}$  فما قياسها بالتقدير الستيني ؟

الحل :

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\frac{\frac{3\pi}{4}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow D^\circ = 180^\circ \times \frac{3}{4} = 135^\circ$$

مثال (3) :

حول : أ)  $45^\circ$  الى التقدير الدائري .  
ب)  $2.6\pi$  الى التقدير الستيني .

الحل :

$$\text{أ) } \frac{\pi}{4} = Q \iff \frac{Q}{45^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \iff \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \therefore$$

$$\text{ب) } 468^\circ = 2.6 \times 180^\circ = D^\circ \iff \frac{2.6\pi}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \iff \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$$

مثال (4) :

زاوية مركزية قياسها  $60^\circ$  فما طول القوس الذي تقابله اذا كان طول نصف قطر دائرتها 9cm ؟

الحل :

$$\text{من الزوايا النصف قطرية .} \quad \frac{1}{3}\pi = Q \iff \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{60^\circ} \iff \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \therefore$$

$$|Q| = \frac{L}{r} \therefore$$

$$\frac{\pi}{3} = \frac{L}{9} \implies L = 3\pi = 3 \times 3.142 \\ = 9.426 \text{ cm}$$

مثال (5) :

زاوية مركزية طول قوسها  $21 \frac{1}{4}$  cm وطول نصف قطر دائرتها 20 cm فما مقدار قياسها الستيني؟



الحل:

$$\text{زاوية نصف قطرية} \cdot \frac{17}{16} = \frac{21 \frac{1}{4}}{20} = |Q| \iff \frac{L}{r} = |Q|$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{17}{D^\circ} \iff \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \text{ ثم}$$

$$D^\circ = \frac{17}{16} \times 180^\circ \times \frac{7}{22} = 60.85^\circ$$

مثال 6 :

في مثلث قائم الزاوية الفرق بين زاويتيته الحادتين 0.44 زاوية نصف قطرية فما قياس كل منها بالتقدير الستيني؟

الحل:

$$\frac{0.44}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \iff \frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \therefore$$

$$D^\circ = \frac{0.44 \times 180}{\pi} = \frac{0.44 \times 180}{3.14} = 25.2^\circ \therefore$$

نفرض ان الزاويتين الحادتين قياسهما الستيني A ، B

$$A + B = 90^\circ \dots\dots(1)$$

$$A - B = 25.2^\circ \dots\dots(2)$$

بالجمع

$$\frac{2A = 115.2}{\therefore A = 57.6^\circ}$$

$$B = 32.4^\circ$$

الخلاصة

العلاقة بين النظام الستيني  $D^\circ$  والنظام النصف قطري Q هي :  $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$

العلاقة بين الزاوية المركزية Q وطول القوس L ونصف قطر دائرتهم r هي :  $|Q| = \frac{L}{r}$

## تمرينات ( 1 - 4 )

س 1 /

حول الى التقدير الدائري كل من قياس الزوايا الآتية :

$$300^\circ , 120^\circ , 30^\circ$$

س 2 /

حول كلاً من الزوايا نصف القطرية الآتية الى التقدير الستيني :

$$\frac{1}{3} , \frac{5\pi}{6} , \frac{3\pi}{5}$$

س 3 /

قياس زاوية مركزية في دائرة  $\frac{5}{6}$  من الزوايا نصف القطرية تقابل قوساً طوله 25 cm جد نصف قطر تلك الدائرة .  
ج / 30 cm

س 4 /

ما طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها  $135^\circ$  في دائرة نصف قطرها 8cm ؟

ج / 18.857cm

س 5 /

زاويتان مجموعهما  $\frac{\pi}{4}$  زاوية نصف قطرية وفرقهما يساوي  $9^\circ$  فما مقدار هاتين الزاويتين بالتقدير الستيني ؟  
ج /  $18^\circ , 27^\circ$

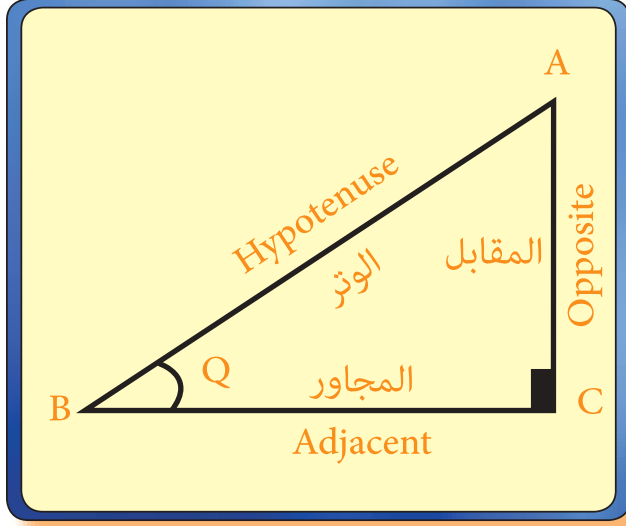
س 6 /

ارسم  $\angle AOB < \pi$  في وضعها القياسي اذا كان قياسها  $= \frac{5\pi}{4}$  ثم جد قياسها بالتقدير الستيني ؟

## [ 4 - 4 ] النسب المثلثية لزاوية حادة وبعض العلاقات الاساسية

الشكل (4 - 5) يمثل المثلث ABC القائم الزاوية في C

وليكن  $m \angle ABC = Q$



الشكل (4 - 5)

### تعريف (4 - 4)

نسمي العدد الذي يمثل النسبة الآتية كما يلي :

1. النسبة  $\frac{AC}{AB}$  تدعى جيب (Sine) الزاوية الحادة (Q)

$$\text{Sin } Q = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{OPP.}}{\text{HYP.}} \quad \text{وتكتب}$$

2. النسبة  $\frac{BC}{AB}$  تدعى جيب تمام (Cosine) الزاوية الحادة (Q)

$$\text{Cos } Q = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{ADJ.}}{\text{HYP.}} \quad \text{وتكتب}$$

3. اما النسبة  $\frac{AC}{BC}$  فتدعى ظل (Tangent) الزاوية الحادة (Q)

$$\text{tan } Q = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{OPP.}}{\text{ADJ.}} \quad \text{وتكتب}$$

من الشكل ( 4 - 5 ) :  $(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$  (مبرهنة فيثاغورس)  
وبقسمة طرفي المعادلة على  $(AB)^2$  ينتج :

$$\left( \frac{AC}{AB} \right)^2 + \left( \frac{BC}{AB} \right)^2 = \left( \frac{AB}{AB} \right)^2$$

ومن تعريف ( 4 - 4 )

$$\text{نحصل على : } \sin^2 Q + \cos^2 Q = 1$$

من تعريف (4-4) أيضاً :

$$\tan Q = \frac{AC}{BC} \text{ وبقسمة طرفي النسبة على } (AB) \text{ نحصل على :}$$

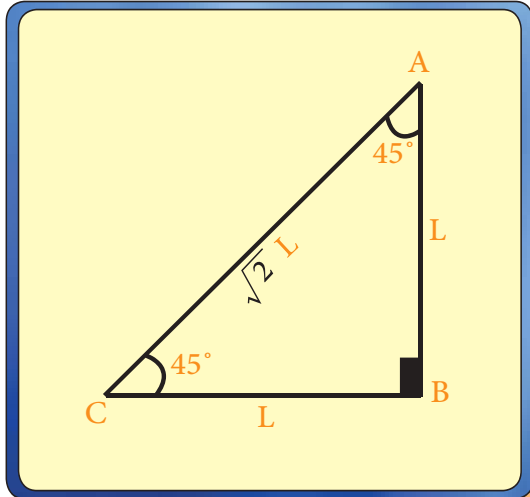
$$\tan Q = \frac{\frac{AC}{AB}}{\frac{BC}{AB}}$$

$$\tan Q = \frac{\sin Q}{\cos Q} \therefore$$

## [ 4 - 5 ] النسبة المثلثية لزاوية خاصة *Trigonometric Ratio* :

### ( 1 ) زاوية قياسها $45^\circ$

نرسم المثلث ABC القائم الزاوية في B . واحدى زواياه قياسها  $(45^\circ)$  فتكون الاخرى  $(45^\circ)$  ايضاً



$$AB = BC = L \therefore$$

$$\text{فيثاغورس: } (AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(AC)^2 = L^2 + L^2 = 2L^2$$

$$AC = \sqrt{2}L \therefore$$

$$\sin 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2}L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2}L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{L}{L} = 1 \Rightarrow \tan 45^\circ = 1$$

### ( 2 ) زاوية قياسها $30^\circ$ ، $60^\circ$

نرسم مثلثاً متساوي الأضلاع طول ضلعه  $2L$

فيكون قياسات زواياه متساوية وكل منها  $60^\circ$

نرسم  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$  لاحظ الشكل المجاور

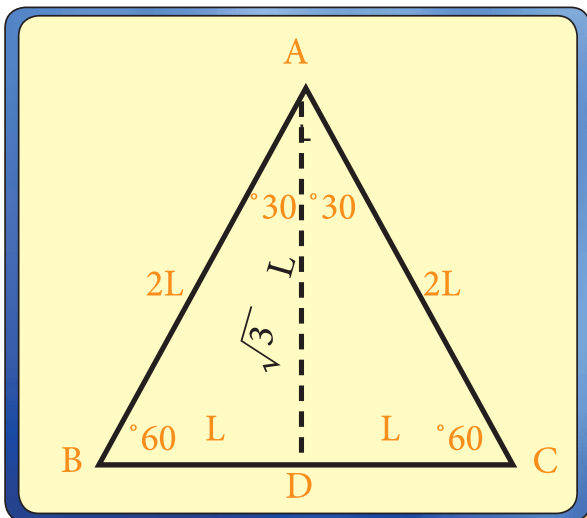
$$\therefore CD = DB = L \text{ وحدة}$$

$$\text{وان } \angle BAD = 30^\circ$$

باستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد ان  $AD = \sqrt{3}L$

$$\sin 30^\circ = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}L}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}L}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{L}{\sqrt{3}L} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}L}{L} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{لاحظ ان :}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{كذلك}$$

اي ان جيب احدهما يساوي جيب تمام الاخرى وبالعكس.

وبصورة عامة اذا كانت Q زاوية حادة فان قياس متممها

هو  $(90^\circ - Q)$  ويكون :

ملاحظة :

الزاويتان  $60^\circ$  ,  $30^\circ$  متتامتان

لأن

$$60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$

$$\sin (90^\circ - Q) = \cos Q$$

$$\cos (90^\circ - Q) = \sin Q$$

### الخلاصة

$$* \sin Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} , \cos Q = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} , \tan Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$* \sin^2 Q + \cos^2 Q = 1 , \tan Q = \frac{\sin Q}{\cos Q}$$

$$* \sin (90^\circ - Q) = \cos Q , \cos (90^\circ - Q) = \sin Q$$

$$* \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} , \cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$* \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

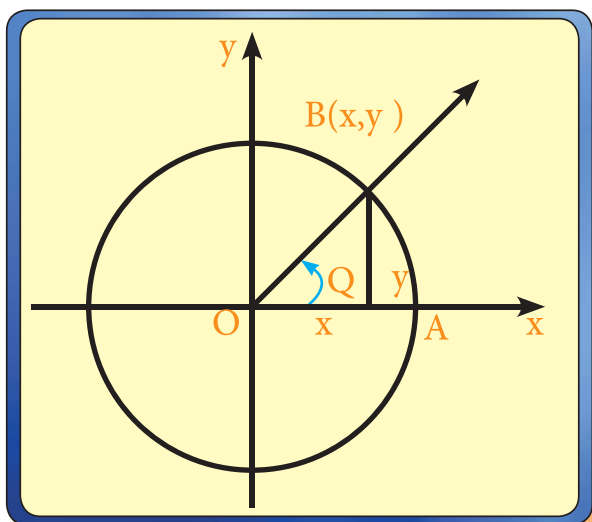
### تعريف (4 - 5)

دائرة الوحدة : هي دائرة مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها يساوي وحدة طول واحدة .

النقطة المثلثية لزاوية في الشكل  $m \angle B \overset{\rightarrow}{O} A = Q$  ،

زاوية موجهة في الوضع القياسي ، B نقطة تقاطع الضلع

النهائي  $\overset{\rightarrow}{O} B$  مع دائرة الوحدة نفرض ان  $B(x,y)$



$$\sin Q = \frac{y}{1} \Rightarrow \sin Q = y$$

$$\cos Q = \frac{x}{1} \Rightarrow \cos Q = x$$

$$B(x,y) = (\cos Q, \sin Q) \therefore$$

ملاحظة :

باستخدام دائرة الوحدة والانعكاس على المستوي يمكن إيجاد النسب المثلثية الآتية :

$$\sin (180^\circ - Q) = \sin Q$$

$$\cos (180^\circ - Q) = -\cos Q$$

$$\tan (180^\circ - Q) = -\tan Q$$

### تعريف (4 - 6)

النقطة المثلثية Trigonometric Point للزاوية الموجهة في الوضع القياسي هي نقطة تقاطع

الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة .

لاحظ أن نقطة B هي نقطة مثلثية للزاوية  $\overrightarrow{AOB}$  مما سبق يتضح أن لكل زاوية موجهة Q في الوضع القياسي نقطة مثلثية (x, y) يكون  $x = \cos Q$  ،  $y = \sin Q$  .

مثال ( 7 ) :

جد  $\sin Q$  ،  $\cos Q$  ،  $\tan Q$  إذا علمت أن  $Q = 0^\circ$  ،  $90^\circ$  ،  $180^\circ$

الحل :

نعلم ان  $0^\circ$  ،  $90^\circ$  ،  $180^\circ$  يقع الضلع النهائي لكل منها على أحد المحورين الاحداثيين . وكما في الشكل ( 6 - 4 ) فان :

$$(\cos 0^\circ , \sin 0^\circ) = (1 , 0) \Rightarrow \cos 0^\circ = 1$$

$$\sin 0^\circ = 0$$

$$\therefore \tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \tan 0^\circ = 0$$

$$(\cos 90^\circ , \sin 90^\circ) = (0,1) *$$

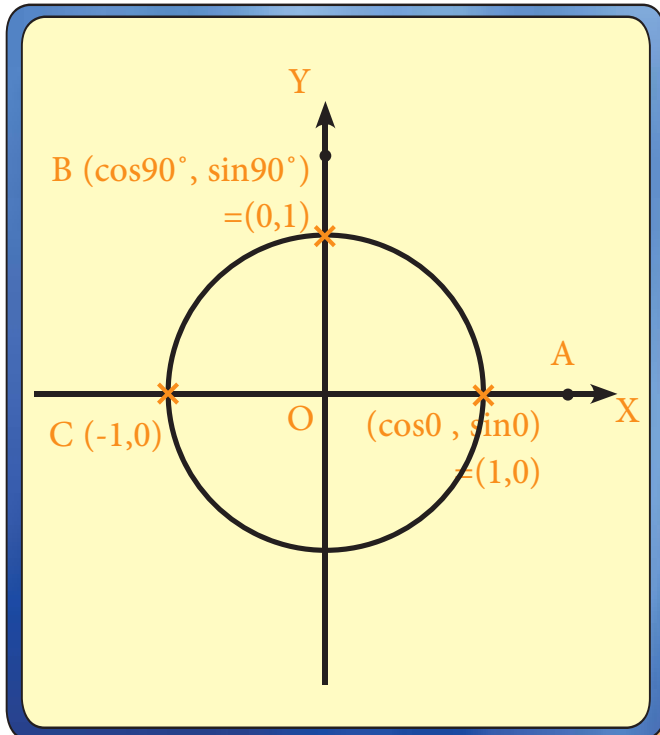
$$\Rightarrow \cos 90^\circ = 0 , \sin 90^\circ = 1$$

$$\text{لكن } \tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} \text{ غير معرف}$$

$$(\cos 180^\circ , \sin 180^\circ) = (-1, 0) *$$

$$\Rightarrow \cos 180^\circ = -1 , \sin 180^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \tan 180^\circ = 0$$



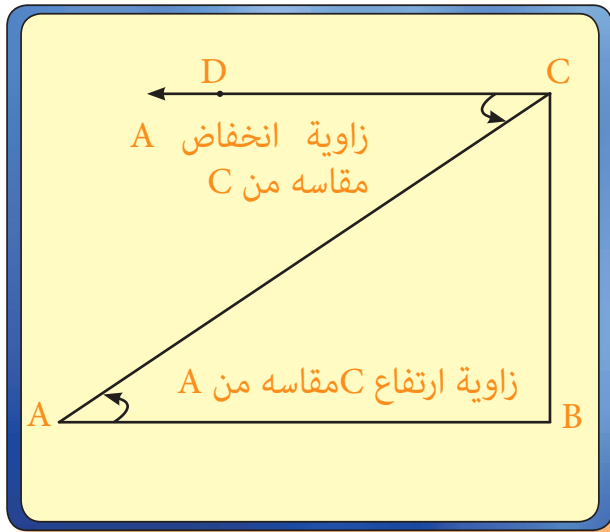
الشكل ( 6 - 4 )



## [ 4 - 7 ] التطبيقات الدائرية :

### [4-7-1] زاويتا الارتفاع والانخفاض:

نتمكن من حساب الارتفاعات والإبعاد عندما نتمكن من قياس الزوايا التي نراها بها. فإذا وقف راصد في نقطة A ونظر إلى نقطة C تقع فوق أفق A فإن الزاوية الحاصلة بين المستقيم الواصل من عين الراصد إلى نقطة C وبين أفق A تدعى ، (زاوية إرتفاع C Angle of Elevation بالنسبة

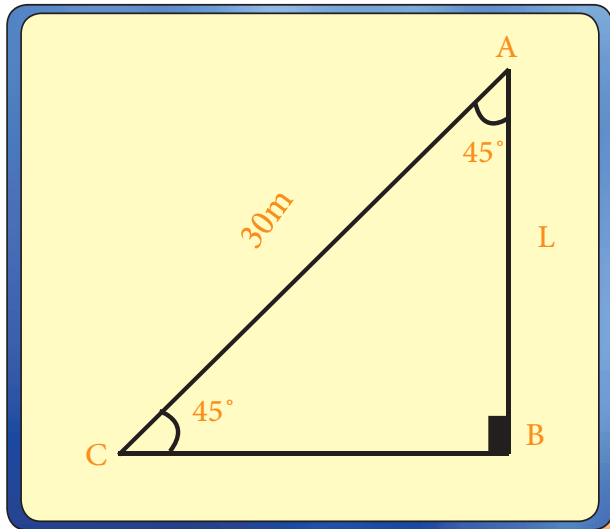


الشكل ( 4 - 7 )

إلى A) مثلاً الزاوية  $\angle CAB$  في الشكل ( 4 - 7 ). أما إذا كانت عين الراصد في C ونظر إلى A التي تحت أفق C ، فإن الزاوية الكائنة ، بين المستقيم الواصل من عين الراصد إلى النقطة A وبين أفق C تدعى (زاوية إنخفاض A Angle of Depression بالنسبة إلى C ) مثلاً الزاوية  $\angle ACD$  في الشكل ( 4 - 7 ) .

مثال ( 8 ) :

طائرة ورقية طول خيطها 30m فإذا كانت الزاوية التي يصنعها الخيط مع الأرض (مع الأفق) هي  $45^\circ$  جد إرتفاع الطائرة الورقية عن الأرض .



الشكل ( 4 - 8 )

الحل :

نفرض أن الارتفاع = L من وحدات الطول

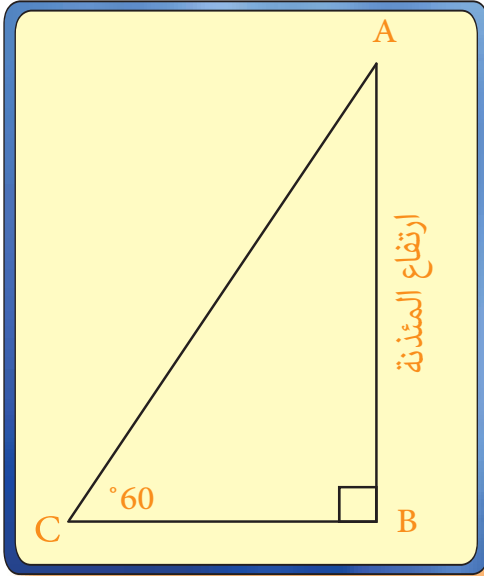
المثلث ABC قائم الزاوية في B .

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{OPP.}}{\text{Hyp.}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{L}{30} \therefore$$

$$L = \frac{30}{\sqrt{2}} = 21.21\text{m} \therefore$$

مثال (9) :

وجد راصد أن زاوية إرتفاع قمة مئذنة من نقطة على الأرض تبعد 8m عن قاعدتها تساوي  $60^\circ$  فما إرتفاع المئذنة ؟



الشكل (9 - 4)

الحل :

$\Delta ABC$  قائم الزاوية في B :

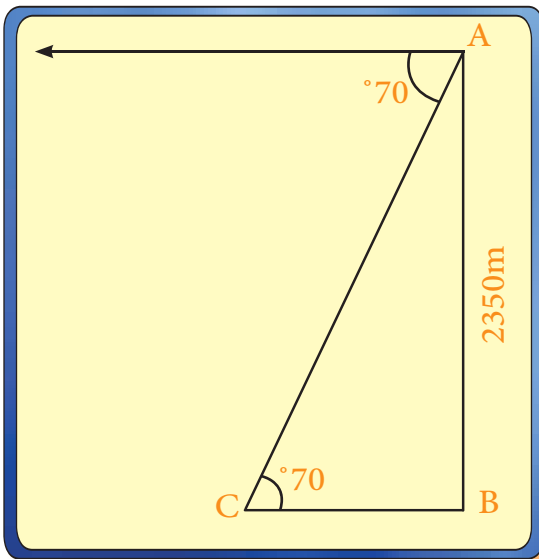
$$\tan 60^\circ = \frac{\text{OPP.}}{\text{ADJ.}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{AB}{8}$$

$$\therefore AB = 8\sqrt{3} \text{ متر إرتفاع المئذنة.}$$

مثال (10) :

جبل إرتفاعه 2350m وجد راصد من قمته أن قياس زاوية انخفاض نقطة على الأرض  $70^\circ$  فما هي المسافة بين النقطة والراصد ؟ علماً أن  $\sin 70^\circ = 0.9396$ .



الشكل (10 - 4)

الحل :

قياس زاوية الارتفاع = قياس زاوية الانخفاض

$\Delta ABC$  قائم الزاوية في B

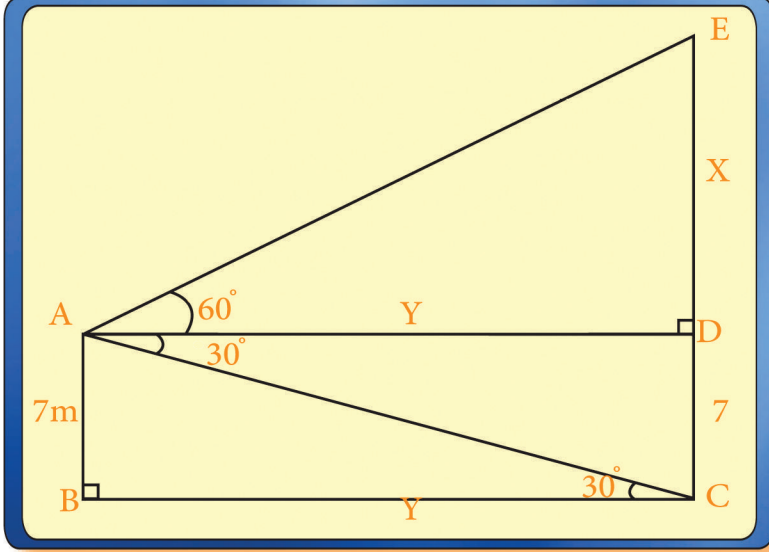
$$\sin 70^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$0.9396 = \frac{2350}{AC}$$

$$AC = \frac{2350}{0.9396} \cong 2500m \quad \therefore$$

مثال 11 :

من سطح منزل إرتفاعه 7 متر وجد راصد أن زاوية إرتفاع أعلى عمارة أمامه  $60^\circ$  وزاوية إنخفاض قاعدتها  $30^\circ$ ، جد البعد بين الراصد والعمارة وإرتفاع العمارة.



الحل :

$$\sphericalangle DAC \cong \sphericalangle ACB$$

[زاوية الانخفاض = زاوية الارتفاع]

في  $\triangle ABC$  القائم في B :

$$\tan 30^\circ = \frac{7}{Y}$$

الشكل (11 - 4) البعد بين الراصد والعمارة.  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{7}{Y} \Rightarrow Y = 7\sqrt{3}$

في  $\triangle EAD$  القائم في D :

$$\tan 60^\circ = \frac{X}{Y}$$

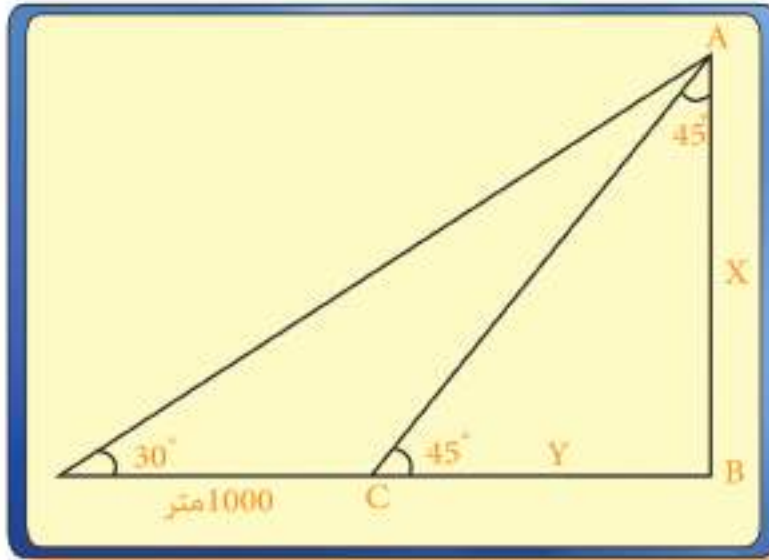
$$\sqrt{3} = \frac{X}{7\sqrt{3}} \Rightarrow X = 21 \text{ m}$$

∴ إرتفاع العمارة =  $X + 7$

$$28\text{m} = 21 + 7 =$$

شاهد راصد أن زاوية إرتفاع منطاد مثبتت هي  $30^\circ$  ولما سار الراصد في مستوى أفقي نحو المنطاد مسافة 1000 متر شاهد أن زاوية الارتفاع هي  $45^\circ$  جد إرتفاع المنطاد الى أقرب متر.

الحل :



$\Delta ABC$  قائم الزاوية في B :

$$\tan 45^\circ = \frac{x}{y}$$

$$1 = \frac{x}{y}$$

$$\therefore x = y \dots \dots (1)$$

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{y + 1000} \dots \dots (2)$$

الشكل ( 12 - 4 )

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{y + 1000} \Rightarrow \sqrt{3} y = y + 1000$$

$$1.7 y - y = 1000$$

$$y = \frac{1000}{0.7} = 1428.6$$

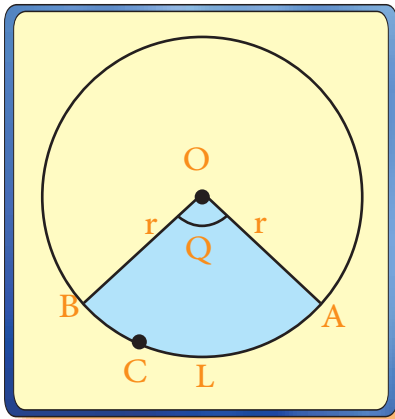
$\therefore x = 1429$  متراً ارتفاع المنطاد .

## [4-7-2] القطاع الدائري Circular Sector :

### تعريف (7-4)

القطاع الدائري هو جزء من سطح دائرة محدد بقوس من الدائرة وبنصفي القطرين المارين بنهايتي القوس.

في الشكل (4-13) تسمى  $\angle AOB$  المركزية Central Angle بزواوية القطاع الأصغر وقياسها اقل من  $180^\circ$ .



الشكل ( 4 - 13 )

مساحة القطاع الدائري =  $\frac{1}{2}$  طول القوس  $\widehat{AB} \times r$

① .....  $\frac{1}{2} L r =$  مساحة القطاع الدائري

وإذا فرضنا أن قياس الزاوية المركزية للقطاع

بالتقدير الدائري  $Q =$

فان  $L = Q r \iff \frac{L}{r} = Q$

وبالتعويض في ① :

② .....  $\frac{1}{2} Q r^2 =$  مساحة القطاع الدائري

### ملاحظة :

محيط القطاع الدائري

$$= r + r + L$$

$$= 2r + L$$

حيث  $L$  طول قوس

القطاع الدائري ،  $r$  طول

نصف قطر دائرته .

نتيجة 1 : إذا فرضنا سطح الدائرة قطاعاً دائرياً زاويته  $2\pi =$

$$\therefore \text{مساحة الدائرة} = \pi r^2 = \frac{1}{2} (2\pi) \times r^2$$

نتيجة 2 : 
$$\frac{Q}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2} Q r^2}{\pi r^2} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة سطح دائرته}}$$

$$\therefore \frac{D^\circ}{360^\circ} = \frac{Q}{2\pi} \text{ حيث } D^\circ \text{ قياس الزاوية المركزية للقطاع بالتقدير الستيني.}$$

$$\therefore \frac{D^\circ}{360^\circ} = \frac{Q}{2\pi} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة سطح دائرته}}$$

$$\therefore \text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{\text{قياس زاويته بالستيني}}{360^\circ} \times \text{مساحة سطح دائرته}$$

مثال 13 :

جد مساحة قطاع دائري قياس زاويته يساوي  $60^\circ$  وطول نصف قطر دائرته 8cm.

الحل :

$$\therefore \text{مساحة القطاع} = \frac{1}{2} Q r^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi 60}{180} \times 64$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3.14}{3} \times 64 = 33.49 \text{ cm}^2$$

حل آخر : مساحة القطاع الدائري =  $\frac{D^\circ}{360^\circ} \times$  مساحة دائرته

$$= \pi \times 64 \times \frac{60^\circ}{360^\circ}$$

$$= 64 \times 3.14 \times \frac{1}{6} = 33.49 \text{ cm}^2$$

مثال 14 :

قطاع دائري مساحته  $15 \text{ cm}^2$  وطول قوسه 6cm جد طول نصف قطر دائرته، محيطه، قياس زاويته بالسنتيني.

الحل :

$$1 - \text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{2} L r$$

$$15 = \frac{1}{2} \times 6 \times r \Rightarrow r = 5$$

$$2 - \text{محيط القطاع الدائري} = 2r + L$$

$$= 2 \times 5 + 6 = 16 \text{ cm}$$

$$3 - \therefore |Q| = \frac{L}{r} = Q = \frac{6}{5} = 1.2 \text{ زاوية نصف قطرية}$$

$$\text{ثم } \frac{3.14}{180^\circ} = \frac{1.2}{D^\circ} \Leftarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$$

$$\therefore D^\circ = \frac{180^\circ \times 1.2}{3.14} = 68.7898^\circ$$

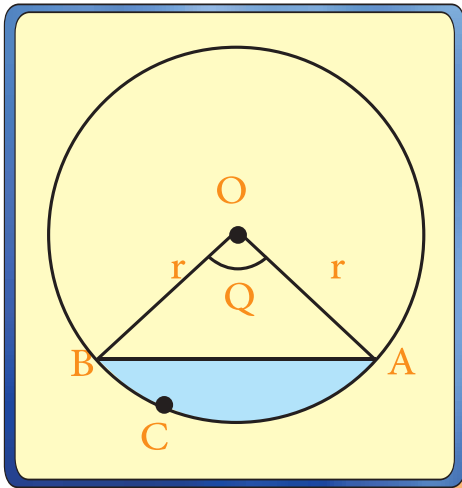
### [4-7-3] القطعة الدائرية Circular Segment :

#### تعريف (4 - 8)

القطعة الدائرية هي جزء من سطح دائرة محدد بقوس فيها ووتر مار بنهايتي ذلك القوس.  
تسمى  $\angle AOB$  المركزية كما في الشكل (4 - 14)

زاوية القطعة الصغرى وقياسها اصغر من  $180^\circ$

لايجاد مساحة القطعة الدائرية :



الشكل (4- 14)

نفرض أن Q القياس الدائري لزاوية القطعة الصغرى

∴ مساحة القطعة ACB = مساحة القطاع (OACB) - مساحة  $\triangle OAB$

$$\therefore \text{مساحة (القطاع الدائري OACB)} = \frac{1}{2} Q r^2$$

$$\text{مساحة } \triangle OAB = \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin Q$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times r \times r \sin Q = \text{مساحة } \triangle OAB$$

$$\therefore \text{مساحة القطعة AC} = \frac{1}{2} Q r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin Q$$

$$\text{مساحة القطعة ACB} = \frac{1}{2} r^2 (Q - \sin Q)$$

حيث Q قياس زاوية القطعة بالتقدير الدائري ، r نصف قطر دائرتها .

مثال 15 :

جد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها 12cm وقياس زاويتها  $30^\circ$ .

الحل :

$$Q = 0.5236 \leftarrow \frac{Q}{30^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \leftarrow \frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180}$$

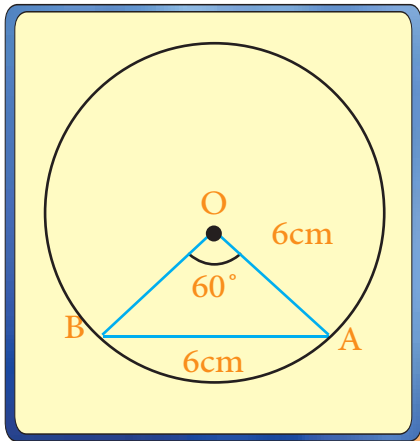
$$\therefore \text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2} r^2 (Q - \sin 30^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times 144 \times (0.5236 - 0.5) =$$

$$\therefore \text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2} \times 144 \times (0.0236) = 1.7 \text{cm}^2$$

مثال 16 :

O مركز دائرة نصف قطرها 6cm، رسم فيها وتر طوله 6cm، جد لأقرب  $\text{cm}^2$  مساحة القطعة الدائرية الصغرى .



الشكل (15-4)

الحل :

$\Delta AOB$  متساوي الاضلاع

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ$$

$$1.047 = \frac{22}{21} = \frac{\pi}{3} = Q \leftarrow \frac{Q}{60^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \leftarrow \frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180}$$

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2} r^2 (Q - \sin Q)$$

$$= \frac{1}{2} \times 36 (1.047 - \sin 60^\circ)$$

$$= 18 (1.047 - 0.865)$$

$$= 3.276 \text{cm}^2 = 18 (0.182)$$



## تمريبات ( 2 - 4 )

س 1 /

وقف شخص في أعلى برج وأبصر شجرتين تقعان مع قاعدة البرج على إستقامة واحدة، فكانت زاوية إنخفاض قاعدة الشجرة الأولى  $70^\circ$  وزاوية إنخفاض قاعدة الشجرة الثانية  $50^\circ$  جد المسافة بين الشجرتين مع العلم أن إرتفاع البرج 30m، علماً أن  $\tan 50^\circ = 1.2$  ،  $\tan 70^\circ = 2.8$

ج/ 14.28m

س 2 /

من نقطة تبعد عن قاعدة برج (50m) وجد أن زاوية إرتفاع قمته  $30^\circ$  فما إرتفاع البرج؟

ج / 28.9m

س 3 /

جد مساحة قطاع دائري طول قوسه 8cm وطول نصف قطر دائرته 3.2cm.

ج/  $12.8\text{cm}^2$

س 4 /

جد مساحة قطاع دائري قياس زاويته تساوي  $100^\circ$  وطول نصف قطر دائرته 10cm.

ج /  $87.3\text{cm}^2$

س 5 /

قطاع دائري مساحته  $37.68\text{cm}^2$  وطول نصف قطر دائرته 6cm جد طول قوسه.

ج / 12.56cm

س 6 /

نصف محيط دائرة هو 10cm. جد مساحة قطاع دائري فيها قياس زاويته  $45^\circ$ .

ج /  $3.98\text{cm}^2$

س 7 /

جد مساحة قطعة دائرية قياس زاويتها  $60^\circ$  وطول نصف قطر دائرتها 8cm.

ج /  $5.81\text{cm}^2$

## [4-8] استخدام الحاسبة في إيجاد قيم التطبيقات الدائرية:

علمت في البند [4-2] ان للزاوية نظامين للقياس هما: القياس الستيني والقياس الدائري والحاسبة تستخدم النظامين وهو ما يلاحظ أعلى مفاتيح الحاسبة اليدوية فالقياس الستيني يرمز له DEG أختصاراً لكلمة (DEGREE) درجة.

اما القياس الدائري فيرمز له RAD أختصاراً لكلمة (RADIAN) نصف قطري .

وهذان الرمزان يظهران في أعلى الشاشة بعد الضغط على المفتاح  $\rightarrow$  DRG فالضغطة الأولى تظهر DEG والضغطة الثانية تظهر RAD وبالعكس.

وللنسب المثلثية مفاتيح أيضاً وسنقتصر على نسبة الجيب، نسبة الجيب تمام ونسبة الظل. فالمفتاح sin يرمز الى الجيب (sine).

والمفتاح cos يرمز الى الجيب تمام (cosine).

والمفتاح tan يرمز الى الظل (tangent).

طريقة استخدام الحاسبة

1. تحدد نظام الزاوية الستيني (DEG) أو الدائري (RAD) بالضغط على (DRG) .

2. تدخل الزاوية حسب النظام.

3. تضغط على مفتاح النسب المثلثية المطلوبة.

الأمثلة الآتية توضح ذلك :

مثال ( 17 ) :

$$(1) \sin 30^\circ$$

$$(2) \cos 120^\circ$$

$$(3) \tan 350^\circ$$

جد

ملاحظة :

$$\sin(-Q) = -\sin Q ,$$

$$\cos(-Q) = \cos Q ,$$

$$\tan(-Q) = -\tan Q$$

الحل :

(1) \* النظام الستيني : نضغط لتظهر DEG أعلى الشاشة.

\* اكتب 30.

\* اضغط على (sin) فتحصل على الناتج = 0.5 .

(2) \* النظام الستيني: نضغط لتظهر DEG

\* اكتب 120.

\* اضغط على (cos) فتحصل على الناتج = -0.5

(3) \* النظام الستيني: نضغط لتظهر DEG

\* اكتب 350 ثم اضغط على (tan) فيكون الناتج  $\approx -0.1763$

فيكون  $\tan(-350^\circ) = -0.1763$   $\tan(-Q) = -\tan Q$

مثال 18 :

جد ناتج  $\sin \frac{5\pi}{4}$  (1) ،  $\cos(-3\pi)$  (2) ،  $\tan \frac{7\pi}{5}$  (3)

الحل :

\* النظام دائري: نضغط لتظهر RAD

\* نضغط على المفتاح الموجود عادةً على اللوحة 2ndf أو INV ويكون بلون مغاير للأسود (اصفر او احمر مثلاً...).

\* نضغط على مفتاح:  $\pi$   $\Leftarrow$  العمليات الحسابية  $\Leftarrow$  النسبة = ناتج

$$\sin \frac{5\pi}{4} \quad (1)$$

\* اضغط لتظهر RAD

\* نضغط 2ndf ثم  $\pi$   $\Leftarrow$  اضرب  $\times 5 = 15.70796327$

$\div 4 = 3.926990817$  ثم  $\sin = -0.707106781$

$$\cos(-3\pi) \quad (2)$$

من المعلوم أن  $\cos(-Q) = \cos Q$  (نحذف الاشارة السالبة).

\* اضغط لتظهر RAD.

\* اضغط 2ndf ثم  $\pi = 3.141592654$   $\Leftarrow$  اضرب  $\times 3 = 9.424777961$

ثم  $\cos = -1$

$$\tan \frac{7\pi}{5} \quad (3)$$

\* اضغط لتظهر .RAD

$$21.9114858 = 7 \times \text{اضرب} \iff 3.141592654 = \pi \text{ ثم } 2\text{ndf}$$

$$.3.07763537 = \tan \iff 4.398229715 = 5 \div \text{ ثم اضغط}$$

جد ما يأتي باستخدام الحاسبة :



$$\tan(-36^\circ) \quad (4) \quad \tan(-15^\circ) \quad (3) \quad \cos(-400^\circ) \quad (2) \quad \sin \frac{\pi}{6} \quad (1)$$
$$\tan \frac{8\pi}{5} \quad (6) \quad , \quad \cos \frac{2\pi}{3} \quad (5)$$



$$0.5 \quad (1)$$

$$0.766044443 \quad (2)$$

$$-0.267949192 \quad (3)$$

$$-0.588 \quad (4)$$

$$-0.5 \quad (5)$$

$$-3.077683537 \quad (6)$$

## [4-9] حل المثلث القائم الزاوية : Solution of Right Angled Triangle

يشتمل كل مثلث على ستة عناصر [ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا] ويقصد بحل المثلث إيجاد قيم عناصره المجهولة.

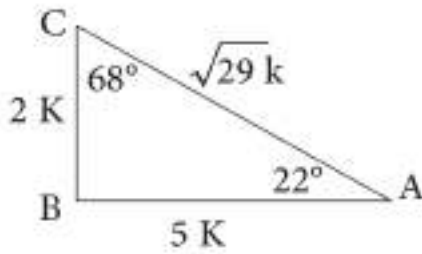
مثال (19) :

إذا كان  $\tan 22^\circ = 0.4$  أوجد :

$$\sin 22^\circ, \cos 22^\circ \quad (1)$$

$$\cos 68^\circ, \sin 68^\circ \quad (2)$$

الحل :



$$\tan 22^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \text{المقابل} = 2k$$

$$\therefore \text{المجاور} = 5k$$

$$\text{مبرهنة فيثاغورس} \dots\dots\dots (AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

$$4K^2 + 25K^2 = (Ac)^2$$

$$AC = \sqrt{29} K$$

$$\sin 22^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{2k}{\sqrt{29}k} = \frac{2}{\sqrt{29}} \quad (1)$$

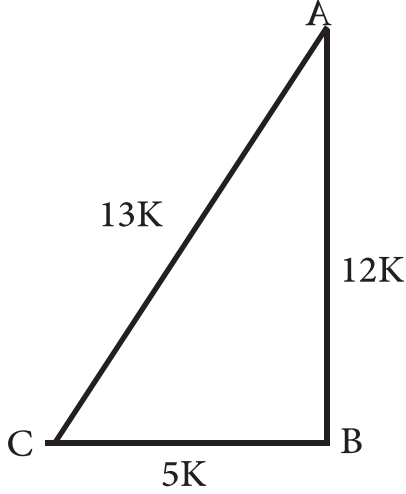
$$\cos 22^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{5k}{\sqrt{29}k} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\sin 68^\circ = \sin (90^\circ - 22^\circ) = \cos 22^\circ = \frac{5}{\sqrt{29}} \quad (2)$$

$$\cos 68^\circ = \cos (90^\circ - 22^\circ) = \sin 22^\circ = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

مثال 20 :

إذا علمت أن  $\cos C = \frac{5}{13}$  في  $\triangle ABC$  القائم الزاوية في B. جد  $\sin A$  ،  $\tan C$  ،  $\cos A$ .



الحل :

نرسم ABC القائم في B :

$$\cos C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{5k}{13k}$$

$$\therefore (AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \text{ (فيثاغورس)}$$

$$169 K^2 = (AB)^2 + 25 K^2 \therefore$$

$$\therefore (AB)^2 = 144 K^2 \Rightarrow AB = 12K$$

$$\tan C = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$$

$$\sin A = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$$

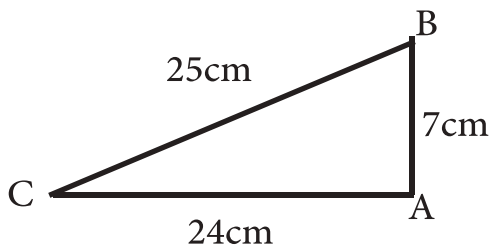
$$\cos A = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$$

مثال 21 :

ABC مثلث قائم الزاوية في A فيه  $AB = 7 \text{ cm}$  ،  $AC = 24 \text{ cm}$  جد :

$\sin C$  ،  $\sin B$  ،  $\tan C$  ،  $\cos B$

الحل :



$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$

$$(BC)^2 = (7)^2 + (24)^2 = 49 + 576 = 625$$

$$BC = 25 \text{ cm} \therefore$$

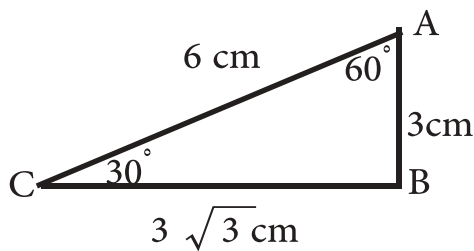
$$\therefore \sin C = \frac{7}{25} \quad , \quad \sin B = \frac{24}{25}$$

$$\tan C = \frac{7}{24} \quad , \quad \cos B = \frac{7}{25}$$

مثال 22 :

حل المثلث ABC القائم الزاوية في B . اذا علمت ان AB = 3 cm AC = 6 cm

الحل :



$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$36 = 9 + (BC)^2$$

$$BC = 3\sqrt{3}$$

استكملنا ايجاد اطوال الاضلاع ، والان سنجد زوايا المثلث الباقية

$$\tan C = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow C = 30^\circ$$

$$m < A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

الخلاصة

في حل المثلث القائم الزاوية نستخدم:

\* النسبة المثلثية  $\tan Q, \cos Q, \sin Q$

\* نستخدم مبرهنة فيثاغورس

وحسب طبيعة كل سؤال

## تمرينات ( 3 - 4 )

س 1 /

ABC مثلث قائم الزاوية في B فيه  $\sin C = \frac{8}{17}$  جد :  $\sin A$  ،  $\tan C$  ،  $\cos C$  .

س 2 /

ABC مثلث قائم الزاوية في C فيه  $BC = 24 \text{ cm}$  ،  $AB = 25 \text{ cm}$  جد قيمة  $\sin^2 B + \cos^2 B$  وباستخدام المعلومات المعطاة.

س 3 /

إذا كان  $\cos Q = \frac{4}{5}$  فأوجد  $\sin Q$  ،  $\tan Q$

س 4 /

سلم طوله 10 متر مرتكز طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الآخر على حائط شاقولي فإذا كانت الزاوية بين السلم والأرض  $30^\circ$  فما بعد طرفه الأعلى عن الأرض وطرفه الأسفل عن الحائط؟  
استعمل ( $\sqrt{3} = 1.73$ )

س 5 /

ABC مثلث قائم الزاوية في C فيه  $\angle CAB = 60^\circ$  ،  $AB = 20 \text{ cm}$  جد مساحة منطقتة.

س 6 /

جد قيمة:

( A )  $\frac{3}{4} \tan^2 30^\circ + 2 \sin 60^\circ + 3 \tan 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \tan 60^\circ$

( B )  $\cos^2 45^\circ \sin 60^\circ \tan 60^\circ \cos^2 30^\circ$  .

( C )  $\sin 120^\circ$  ،  $\cos 135^\circ$  ،  $\tan 150^\circ$  .

س 7 /

في الشكل المجاور :

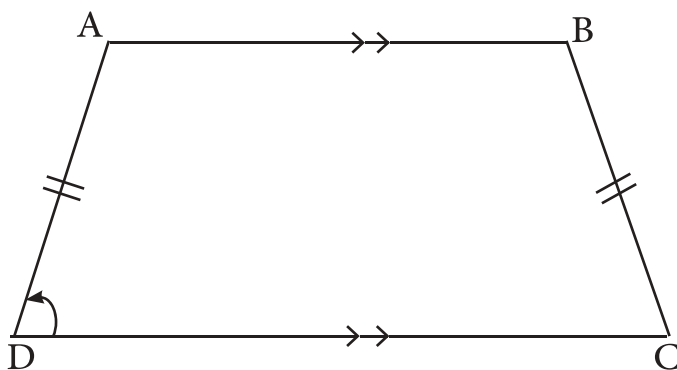
ABCD شبه منحرف

فيه  $AD=BC$

(متساوي الساقين ) ،

$DC=20 \text{ cm}$  ،  $AB=14 \text{ cm}$

جد  $\angle CDA$  ،  $AD=6 \text{ cm}$





## 5

## الفصل الخامس : المتجهات Vectors

[5-1] مفهوم المتجه هندسياً وجبرياً

[5-2] المتجه المقيد

[5-3] إيجاد طول المتجه واتجاهه

[5-4] جمع المتجهات وضربها بعدد حقيقي

[5-5] اعطاء المتجه بدلالة متجهي الوحدة في المستوى

## الاهداف السلوكية

ينبغي للطالب في نهاية هذا الفصل يكون قادراً على ان:

- يتعرف على المتجه هندسياً.

- يتعرف على المتجه جبرياً

- يتعرف على المتجه المقيد

- يتمكن من ايجاد طول المتجه المقيد

- يتمكن من ايجاد اتجاه المتجه المقيد

- يتمكن من جمع المتجهات

- يتمكن من ضرب المتجه بعدد حقيقي

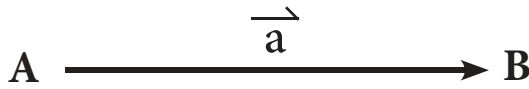
- يتعرف على متجهي الوحدة

- يتمكن من وضع المتجه بدلالة متجهي الوحدة

الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
$\vec{a} = (x, y)$	المتجه a
$\ \vec{a}\  = \sqrt{x^2 + y^2}$	طول المتجه a
$\vec{0} = (0, 0)$	* المتجه الصفري
$\vec{u}_1 = (1, 0), \vec{u}_2 = (0, 1)$	متجهي الوحدة $u_1, u_2$

[5-1] مفهوم المتجه ((الهندسي والجبري))

**مقدمة :** بعض الكميات الفيزيائية والرياضية مثل الطول والكتلة والزمن والحجم والمسافة وغيرها تتحدد تحديداً كاملاً بذكر عدد يدل على مقدارها فقط، مثل هذه الكميات تسمى الكميات العددية أو الكميات غير المتجهة. وكميات أخرى مثل القوة والسرعة والأزاحة يكون الاتجاه بالإضافة إلى المقدار ضرورياً في تحديدها تحديداً كاملاً مثل هذه الكميات تسمى الكميات المتجهة. نشأت فكرة المتجه أصلاً في علم الميكانيك لتمثيل القوة والسرعة والإزاحة وغيرها، وإستخدمت القطعة المستقيمة المتجهة من نقطة مثل A تسمى نقطة البدء إلى نقطة أخرى مثل B تسمى نقطة الانتهاء لتمثيل المتجه ويرمز عادة للمتجه بالرمز  $\overrightarrow{AB}$  حيث يعني السهم أن القطعة موجهة من A إلى B وقد يرمز للمتجه بحرف واحد مثل  $\vec{a}$  (مع معرفة بدايته ونهايته) هناك إتجاهان لدراسة المتجهات :-



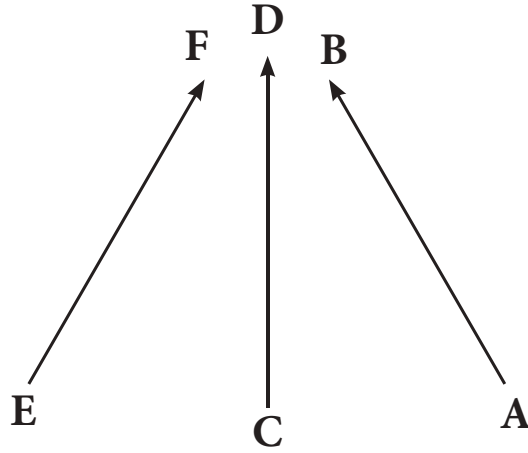
(1) هندسي

(2) جبري

وسنؤكد في دراستنا في هذا الفصل على الاتجاه الجبري مستفيدين من الاتجاه الهندسي لأجل التوضيح.

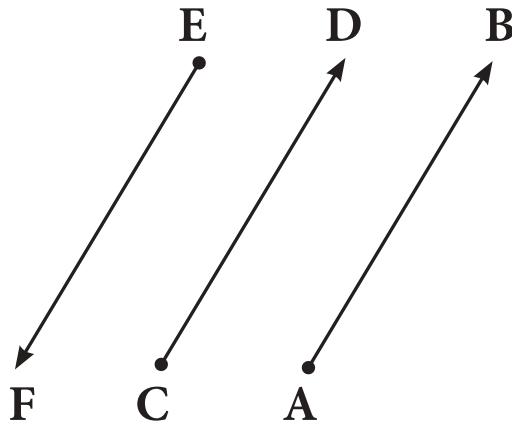
مفاهيم أساسية المتجه: من الناحية الهندسية يعني قطعة مستقيم موجهة كما أسلفنا

فالقطع EF ، CD ، AB تمثل متجهات مختلفة .



الشكل ( 1 - 5 )

**المتجهان المتوازيان:** إذا كانت قطعتاهما متوازيتين، قد يكون للمتجهين المتوازيين الاتجاه نفسه وقد يكونان بالاتجاه متعاكسين . من الشكل (5-2) نلاحظ ان  $\vec{AB}$  يوازي  $\vec{CD}$  ولهما نفس الاتجاه ولكن  $\vec{AB}$  يوازي  $\vec{EF}$  كما انهما متعاكسان في الاتجاه

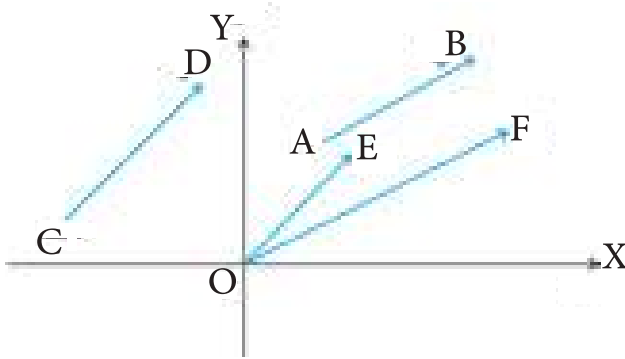


الشكل ( 2 - 5 )

**المتجهان المتكافئان:** إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه

## [5-2] المتجه المقيد: Conorlical Vector

لكل متجه في المستوي يوجد متجه وحيد يكافئه يبتدئ من نقطة الأصل (0, 0) ، لذا فبدلاً من التعامل من عدد غير منته من المتجهات المتساوية في الطول والاتجاه، سنتخذ المتجه المكافئ لها والذي يبتدئ بنقطة الأصل ممثلاً عنها جميعاً، يسمى المتجه الذي يبتدئ بنقطة الاصل بالمتجه القياسي أو المتجه المقيد. وتسمى بقية المتجهات غير المرتبطة بنقطة الاصل (المتجه الحر أو المتجه الطليق).



الشكل ( 3 - 5 )

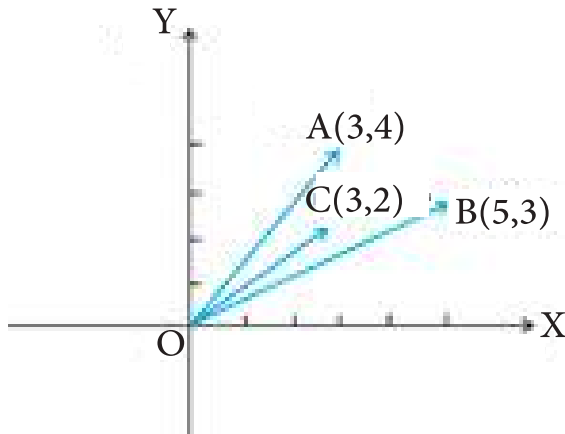
لاحظ أن :

$\vec{OF}$  ،  $\vec{OE}$  متجهان مقيدان

بينما  $\vec{CD}$  ،  $\vec{AB}$  متجهان طليقان

### [5-2-1] المتجهات وتمثيلها :

لقد مثلنا الزوج (3, 4) بنقطة في المستوي المتعامد المحورين وكل زوج من الأعداد الحقيقية نستطيع تمثيله بنقطة واحدة فالزوجان المرتبان (5, 3)، (3, 2) يتمثلان بالنقطتين B ، C على التوالي .



الشكل ( 4 - 5 )

ونستطيع تمثيل الزوج المرتب

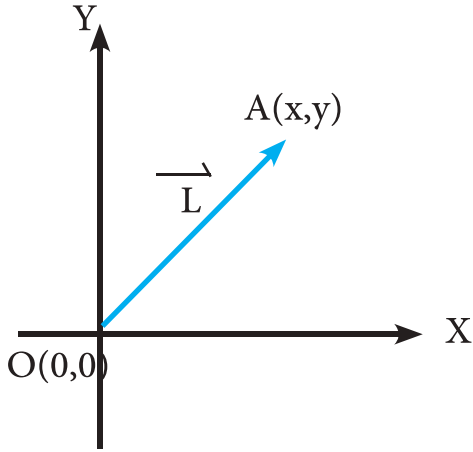
من الأعداد الحقيقية بقطعة

متجهه بدايتها نقطة الاصل

ونهايتها الزوج المرتب المعلوم

فالقطع الموجهة  $\vec{OA}$  ،  $\vec{OB}$  ،  $\vec{OC}$

تمثل الأزواج المرتبة (3,2) ، (5,3) ، (3,4) . على هذا الأساس سنمثل المتجه بزواج من الأعداد



الشكل ( 5 - 5 )

الحقيقية نكتب :  $\vec{OA} = \vec{A} = (x, y)$

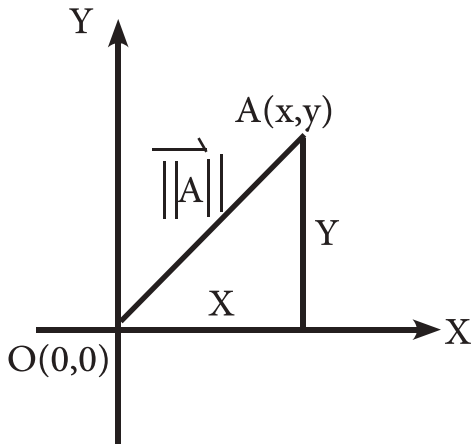
لأننا سوف نقتصر في دراستنا على المتجهات

المقيدة فقط، لذا كلها تبتدئ بنقطة الأصل

فنذكر النقطة النهائية فقط .

### [5-3] طول المتجه واتجاهه :

#### [5-3-1] طول المتجه :



الشكل ( 5-6 )

هي المسافة بين نقطة بداية المتجه ونقطة أنتهائه.

فطول  $\vec{AB}$  يساوي طول AB ويرمز له  $|| \vec{AB} ||$  .

#### تعريف (5-1)

إذا كان  $\vec{A}$  متجهها حيث  $\vec{A} = (x,y)$  فان :

$$|| \vec{OA} || = || \vec{A} || = OA = \sqrt{x^2 + y^2}$$

لاحظ الشكل ( 6 - 5 )

مثال 1 :

جد طول كل من المتجهات الآتية :

$$(3,4), \left(\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{7\sqrt{2}}{10}\right), (-12, -9)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \text{طول المتجه } (3,4) \text{ هو : } & \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \\ \text{طول المتجه } \left(\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{7\sqrt{2}}{10}\right) \text{ هو : } & \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{100} + \frac{98}{100}} = \sqrt{\frac{100}{100}} = 1 \\ \text{طول المتجه } (-12, -9) \text{ هو : } & \sqrt{(-12)^2 + (-9)^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15 \end{aligned}$$

### تعريف (5-2)

**المتجه الصفري Zero Vector** : يسمى المتجه  $(0,0)$  بالمتجه الصفري لان نقطة بدايته ونهايته هي نقطة الأصل . ويرمز له  $\vec{0}$  ، وطول  $\vec{0} = \|\vec{0}\| = 0$  = صفر .

### تعريف (5-3)

**المتجهان المتساويان** : يقال للمتجهين  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  أنهما متساويان إذا فقط إذا كان  $x_1 = x_2, y_1 = y_2$  .

### تعريف (5-4)

**اتجاه المتجه** : الزاوية التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

### 2-3-5 | إيجاد اتجاه المتجه :

إذا كان  $\vec{A} = (x, y)$  متجهاً فإن اتجاه  $\vec{A}$  يعرف بقياس الزاوية  $Q$  حيث  $0 \leq Q < 2\pi$  مقاسة باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة من محور السينات الموجب الى المتجه  $\vec{A}$ . لاحظ ان المتجه الصفري لايمكن تعريف اتجاهه.

$$\cos Q = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad \sin Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



جد طول واتجاه  $\vec{OB} = (\sqrt{3}, -1)$



$$\|\vec{OB}\| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

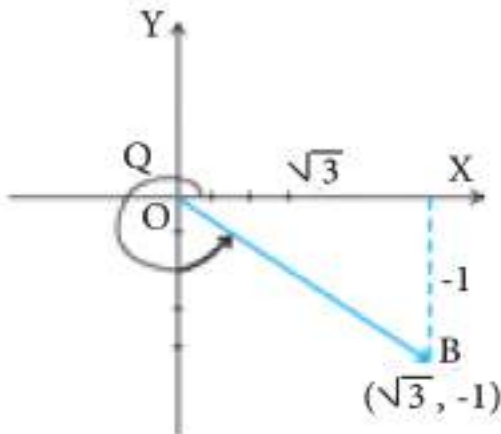
نفرض أن  $Q$  يساوي قياس الزاوية التي يحددها المتجه  $\vec{OB}$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$$\cos Q = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{فيكون}$$

$$\sin Q = \frac{-1}{2}$$

من الشكل (5-7) نلاحظ ان  $Q$

تقع في الربع الرابع



الشكل ( 5 - 7 )

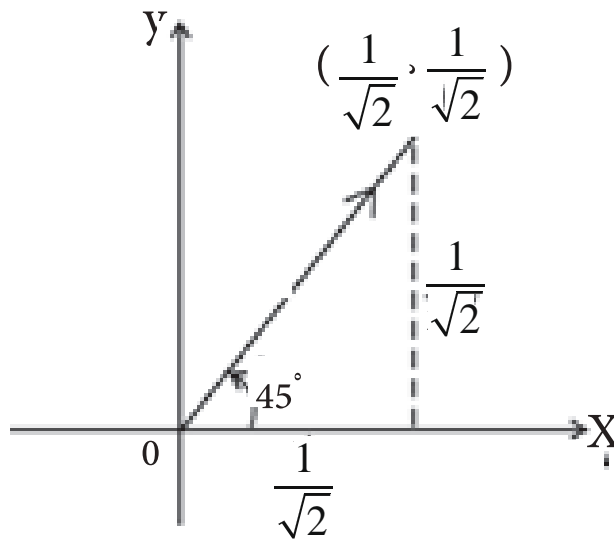
$$\text{اتجاه المتجه هو : } 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

مثال (3) :

جد إتجاه المتجه  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

الحل :

نفرض أن Q تساوي قياس زاوية المتجه  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$



الشكل (8 - 5)

$$\cos Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

من الشكل (8-5) نلاحظ:

Q تقع في الربع الاول فتكون  $\frac{\pi}{4}$



مثال (4) :

جد المتجه الذي طوله = 5 وحدات وإتجاهه  $\frac{\pi}{6}$

الحل :

نفرض المتجه  $a(x, y) =$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{5}$$

$$\therefore x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} = \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{5}$$

$$\therefore y = \frac{5}{2}$$

$\therefore$  المتجه هو  $(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2})$

الخلاصة

(1) ان طول  $\vec{A}(x,y)$  يساوي  $\|\vec{A}\|$  حيث  $\|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

(2) لايجاد اتجاه  $\vec{A}(x,y)$  نستخدم  $\cos\theta = \frac{x}{\|\vec{A}\|}$  ,  $\sin\theta = \frac{y}{\|\vec{A}\|}$



## تمرينات ( 1 - 5 )

س 1 /

جد طول وإتجاه كل من المتجهات الآتية ثم ارسم القطعة المستقيمة الموجهة التي تمثل كلاً منها:

- أ)  $(-2, 2)$  ، ب)  $(-3, 0)$  ، ج)  $(1, \sqrt{3})$   
د)  $(0, 6)$  ، هـ)  $(\sqrt{3}, -1)$  ، و)  $(-3, -3)$  ، ز)  $(0, -8)$

س 2 /

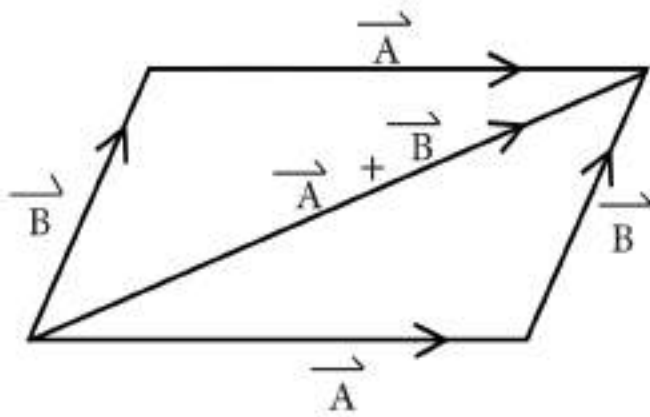
جد المتجه الذي طوله واتجاهه كما يلي:

- أ)  $\|\vec{B}\| = 2$  ،  $Q = \frac{\pi}{6}$   
ب)  $\|\vec{B}\| = \sqrt{2}$  ،  $Q = \frac{\pi}{4}$   
ج)  $\|\vec{B}\| = 4$  ،  $Q = \pi$   
د)  $\|\vec{B}\| = 3$  ،  $Q = \frac{3\pi}{2}$   
هـ)  $\|\vec{B}\| = 4$  ،  $Q = \frac{2\pi}{3}$

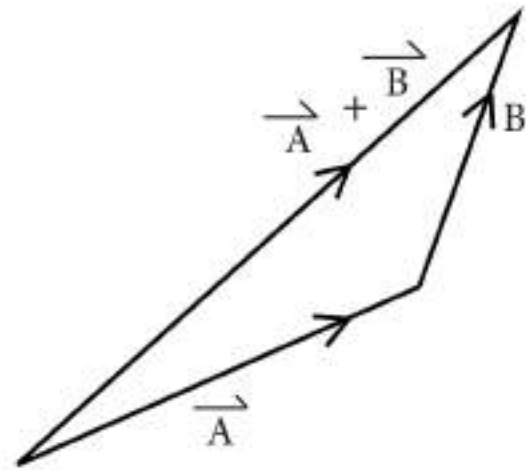
## [5-4] جمع المتجهات وضربها بعدد حقيقي :

### [5-4-1] جمع المتجهات :

لجمع متجهين مثل  $\vec{A}$  ،  $\vec{B}$  هندسياً نرسم أحدهما ومن نقطة إنتهائه المتجه الآخر ويكون المتجه الذي يبتدئ بنقطة بدء المتجه الاول وينتهي بنقطة انتهاء المتجه الثاني هو حاصل جمع المتجهين لاحظ شكل (5-9) ويتم إيجاد مجموع متجهين بطريقة متوازي الاضلاع، إذ يمثل المجموع قطر متوازي الاضلاع الذي يكون المتجهان ضلعين متجاورين فيه كما في شكل ( 10 - 5 ) .

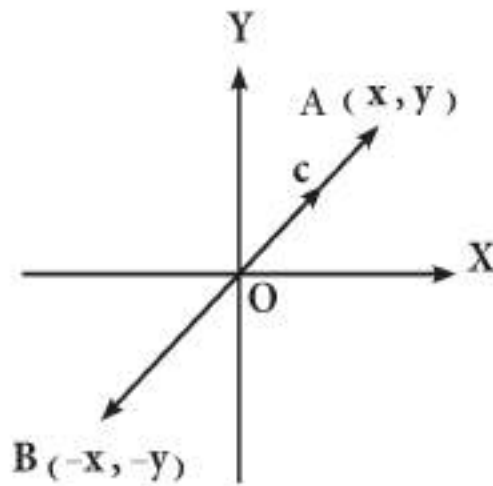


شكل (5-10)



شكل (5-9)

قد يقع متجهان على مستقيم واحد عندئذ يقال أنهما على إستقامة واحدة كما في المتجهين  $\vec{A}$  ،  $\vec{C}$  بينما المتجهان  $\vec{A}$  ،  $\vec{B}$  متضادان في الاتجاه كما في الشكل ( 11 - 5 ) .



الشكل (5-11)

فإذا كان المتجهان  $\vec{A}$  ،  $\vec{B}$  على إستقامة واحدة وكانا متساويين في الطول ومتعاكسين في الاتجاه

وكان  $\vec{A} = (x, y)$  فإن  $\vec{B} = (-x, -y)$

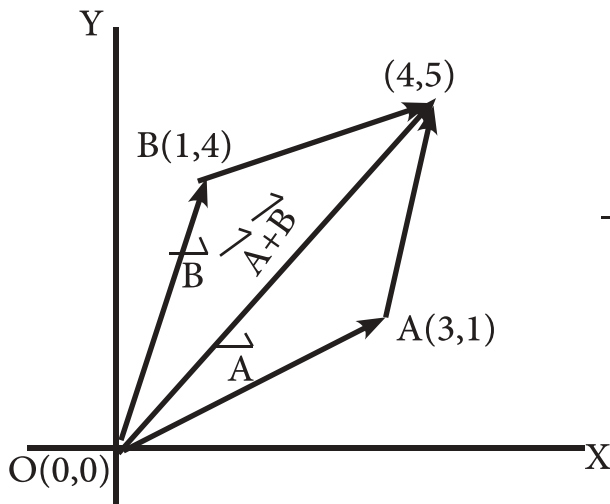
لاحظ  $\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

يرمز لسالب المتجه  $A$  بالرمز  $-\vec{A}$ .

### تعريف (5-5)

إذا كان  $\vec{A} = (x_1, y_1)$  ،  $\vec{B} = (x_2, y_2)$  فإن :

$$\vec{A} + \vec{B} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$



الشكل (5 - 12)

مثال (5) :

إذا كان  $\vec{A} = (3, 1)$  ،  $\vec{B} = (1, 4)$  فجد  $\vec{A} + \vec{B}$

الحل :

$$\vec{A} + \vec{B} = (3, 1) + (1, 4) = (4, 5)$$

ويمكن توضيح ذلك هندسياً كما في الشكل (5 - 12)

لاحظ أن  $\vec{A} + \vec{B}$  يمثل قطر متوازي الاضلاع المكمل للمتجهين  $\vec{A}$  ،  $\vec{B}$

مثال ( 6 ) :

إذا كان  $\vec{A} = (-4, 3)$  ،  $\vec{B} = (5, -2)$  فأوجد  $\vec{A} + \vec{B}$  .

الحل :

$$\vec{A} + \vec{B} = (-4, 3) + (5, -2) = (1, 1)$$

### [5-4-2] خواص جمع المتجهات :

(1) الانغلاق: إذا كان كل من  $\vec{A}$  ،  $\vec{B}$  متجهاً فإن  $\vec{A} + \vec{B}$  متجهاً أيضاً .

(2) التجميع: إذا كان كل من  $\vec{A}$  ،  $\vec{B}$  ،  $\vec{C}$  متجهاً

$$\text{فان } (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

(3) التبديل: إذا كان كل من  $\vec{A}$  ،  $\vec{B}$  متجهاً فإن  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

(4) وجود المحايد الجمعي: المتجه الصفري هو العنصر المحايد لعملية الجمع في المتجهات

$$\vec{A} + (0,0) = (0,0) + \vec{A} = \vec{A} \text{ فان أي متجه فان } \vec{A} + (0,0) = (0,0) + \vec{A} = \vec{A}$$

(5) وجود النظير الجمعي: إذا كان  $\vec{A}$  أي متجه فيوجد متجه آخر هو  $\vec{B} = -\vec{A}$

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = (0,0) \text{ بحيث}$$

(6) خاصية الحذف: إذا كان  $\vec{A}$  ،  $\vec{B}$  متجهاً وكان  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{A} + \vec{C}$  فان  $\vec{B} = \vec{C}$

مثال ( 7 ) :

جد النظير الجمعي للمتجه  $(-2, 3)$

الحل :

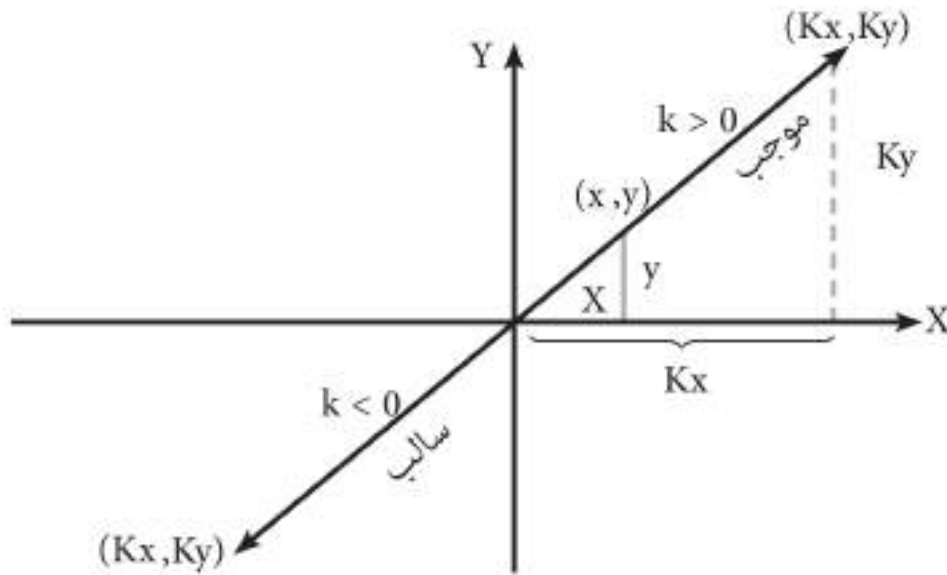
النظير الجمعي للمتجه  $(-2, 3)$  هو  $(2, -3)$  لأن :

$$(-2, 3) + (2, -3) = (-2 + 2, 3 + (-3)) = (0, 0)$$

### تعريف (6 - 5)

إذا كان  $\vec{A} = (x, y)$  وكان  $K$  أي عدد حقيقي فإن  $\vec{K A} = \vec{A K} = (Kx, Ky)$  ويمكن توضيح هذا التعريف هندسياً كما يلي:

نفرض أن  $\vec{A} = (x, y)$  فإن  $\vec{KA}$  يمثل متجهاً على إستقامة  $\vec{A}$  وطوله يساوي  $K \|\vec{A}\|$  أي  $K$  مرة بقدر طول المتجه  $\vec{A}$  عندما يكون  $K > 0$  وله اتجاه المتجه  $\vec{A}$  نفسه .  
 لاحظ الشكل (13 - 5) أما إذا كانت  $K < 0$  (سالبة) فإن المتجه  $\vec{KA}$  يقع على إستقامة  $\vec{A}$  وطوله يساوي  $K \|\vec{A}\|$  . أي  $K$  مرة بقدر طول  $\vec{A}$  وله إتجاه معاكس لاتجاه  $\vec{A}$  .



شكل (13 - 5)

مثال ( 8 ) :

إذا كان  $\vec{C} = (3, -1)$  فجد  $2\vec{C}$  ،  $\frac{1}{2}\vec{C}$  ،  $-3\vec{C}$

الحل :

$$2\vec{C} = 2(3, -1) = (6, -2)$$

$$\frac{1}{2}\vec{C} = \frac{1}{2}(3, -1) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$-3\vec{C} = -3(3, -1) = (-9, 3)$$

مثال ( 9 ) :

إذا كان  $\vec{A} = (3, -2)$  ،  $\vec{B} = (4, 3)$  وكان  $K = 3$  ،  $L = -2$  جد  
(1)  $\vec{A} + \vec{B}$     (2)  $K\vec{A}$     (3)  $L\vec{B}$     (4)  $K\vec{A} + L\vec{B}$

الحل :

$$(1) \vec{A} + \vec{B} = (3 + 4, -2 + 3) = (7, 1)$$

$$(2) K\vec{A} = 3(3, -2) = (9, -6)$$

$$(3) L\vec{B} = -2(4, 3) = (-8, -6)$$

$$(4) K\vec{A} + L\vec{B} = (9, -6) + (-8, -6) \\ = (1, -12)$$

### [5-4-4] خواص عملية ضرب المتجهات بعدد حقيقي:

(1) خاصية التوزيع: لكل  $\vec{A}$ ،  $\vec{B}$  متجه ،  $K$  عدد حقيقي يكون :

$$K(\vec{A} + \vec{B}) = K\vec{A} + K\vec{B}$$

$$(\vec{A} + \vec{B})K = \vec{A}K + \vec{B}K$$
 كذلك

(2) خاصية التجميع: لكل  $\vec{A}$  متجه وكل من  $K, L \in \mathbb{R}$  يكون:

$$(K \times L)\vec{A} = K(L\vec{A}) = L(K\vec{A})$$

(3) خاصية الحذف: لكل  $\vec{A}, \vec{B}$  متجه  $K \in \mathbb{R}$  حيث  $K \neq 0$  فاذا كان  $K\vec{A} = K\vec{B}$  فان  $\vec{A} = \vec{B}$  وبالعكس .

$$1 \times \vec{A} = \vec{A} \times 1 = \vec{A} \quad (4)$$

$$0 \times \vec{A} = \vec{A} \times 0 = \vec{0} \quad (5)$$

**[5-4-5] طرح متجهين :**

### تعريف (5 - 7)

إذا كان كل من  $\vec{A}, \vec{B}$  متجهاً فان  $\vec{A} - \vec{B}$  يعرف أنه  $\vec{A} + (-\vec{B})$

**مثال (10) :**

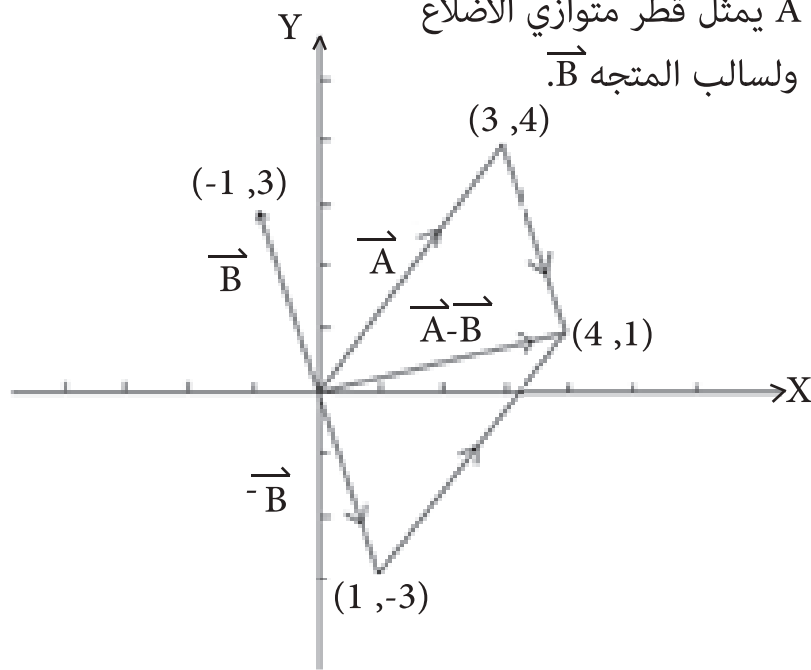
إذا كان  $\vec{A} = (3, 4), \vec{B} = (-1, 3)$  جد  $\vec{A} - \vec{B}$

**الحل :**

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = (3, 4) + (1, -3) = (4, 1)$$

ويمكن توضيح ذلك هندسياً كما يأتي:

أي أنه:  $\vec{A} - \vec{B}$  يمثل قطر متوازي الاضلاع للمتجه  $\vec{A}$  ولسالب المتجه  $\vec{B}$ .



الشكل (14 - 5)



مثال ( 11 ) :

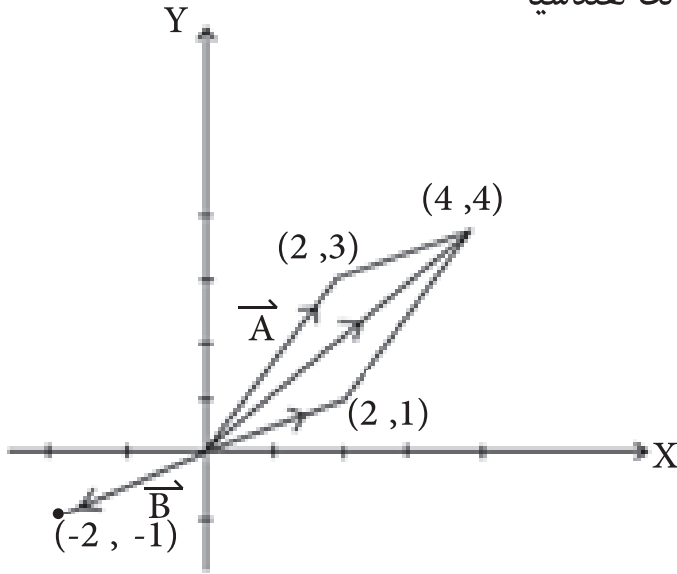
إذا كان  $\vec{A} = (2, 3)$  ،  $\vec{B} = (-2, -1)$  ،  $K = 2$  ،  $L = -1$   $\vec{A} - \vec{B}$  (1)  $2\vec{A} - \vec{B}$  (2) ووضح ذلك هندسياً

الحل :

$$(1) \vec{A} - \vec{B} = (2, 3) - (-2, -1)$$

$$= (2, 3) + (2, 1) = (4, 4)$$

والشكل ( 15 - 5 ) يوضح ذلك :



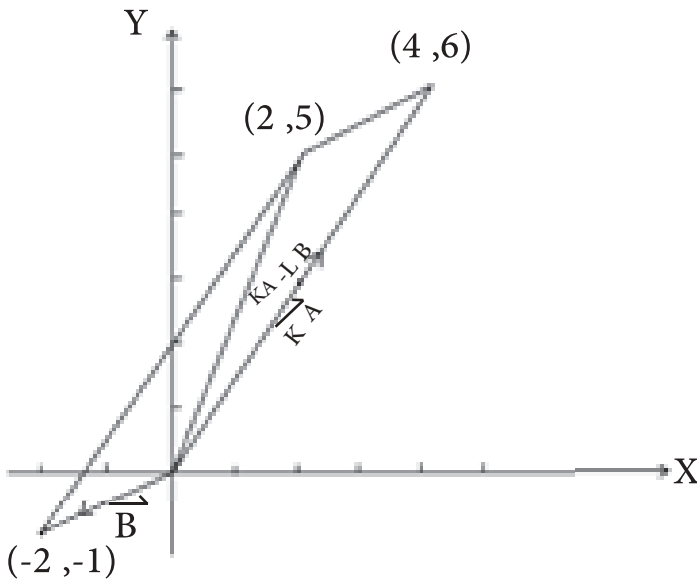
الشكل ( 15 - 5 )

$$(2) K\vec{A} - L\vec{B} = 2(2, 3) - (-1)(-2, -1)$$

$$= (4, 6) + (-2, -1)$$

$$= (2, 5)$$

ويوضح ذلك بالرسم الآتي:



الشكل ( 16 - 5 )

نرسم  $\vec{A}$  ثم نمده بقدر طولته فنحصل على  $2\vec{A}$  ثم نرسم  $\vec{B}$  ونجد  $-\vec{B}$

ثم  $\vec{B} = -1 \times -\vec{B}$  أي اننا نعود

الى  $\vec{B}$  ثانية ثم نجمع  $2\vec{A} + \vec{B}$

كما فعلنا في السؤال السابق .

### تعريف (5 - 8)

- (1) متجه الوحدة الأساسي  $\vec{U}_1$  هو القطعة المستقيمة الموجهة التي بدايتها نقطة الأصل وطولها وحدة واحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور السينات ويرمز له  $\vec{U}_1 = (1, 0)$ .
- (2) متجه الوحدة الأساسي  $U_2$  هو القطعة المستقيمة الموجهة التي بدايتها نقطة الأصل وطولها وحدة واحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور الصادات ويرمز له  $\vec{U}_2 = (0, 1)$ .

إذا كان  $\vec{C} = (x, y)$  فإن:

$$\vec{C} = (x, 0) + (0, y)$$

$$\vec{C} = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$\vec{C} = x\vec{U}_1 + y\vec{U}_2$  هذا يمثل المتجه  $\vec{C}$  بدلالة متجهي الوحدة  $\vec{U}_1, \vec{U}_2$

فمثلاً ويمكننا كتابة المتجهات  $(9, 0), (-3, 0), (0, -2), (0, 6)$  بدلالة  $\vec{U}_1, \vec{U}_2$  كالآتي:

$$(9, 0) = 9\vec{U}_1, (-3, 0) = -3\vec{U}_1, (0, -2) = -2\vec{U}_2, (0, 6) = 6\vec{U}_2$$

مثال ( 12 ) :

إذا كان  $\vec{A} = (4, 7), \vec{B} = (-5, 3)$  جد  $\vec{A} + \vec{B}$  وعبر عن الناتج بدلالة متجهي الوحدة .

الحل :

$$\vec{A} + \vec{B} = (4, 7) + (-5, 3) = (-1, 10) = -(1, 0) + 10(0, 1) = -\vec{U}_1 + 10\vec{U}_2$$

وعلى هذا الأساس يمكننا كتابة أي متجه بدلالة  $\vec{U}_1, \vec{U}_2$  كما في الامثلة الآتية :

$$(2, 5) = 2\vec{U}_1 + 5\vec{U}_2$$

$$(-4, 2) = -4\vec{U}_1 + 2\vec{U}_2$$

$$(-2, -3) = -2\vec{U}_1 - 3\vec{U}_2$$

وإذا كتب المتجه بصيغة متجهي الوحدة فاننا نستطيع إيجاد الزوج المرتب الذي يمثله فمثلاً

$$\vec{A} = (4,5) \text{ فإن } \vec{A} = 4\vec{U}_1 + 5\vec{U}_2$$

$$\vec{B} = (-2, 3) \text{ فإن } \vec{B} = -2\vec{U}_1 + 3\vec{U}_2 \text{ وهكذا.}$$

**مثال ( 13 ) :**

إذا كان  $\vec{A} = \vec{U}_1 - 3\vec{U}_2$  ،  $\vec{B} = 2\vec{U}_1 + \vec{U}_2$  جد  $\vec{A} + \vec{B}$

**الحل :**

$$\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} &= (\vec{U}_1 - 3\vec{U}_2) + (2\vec{U}_1 + \vec{U}_2) = \vec{U}_1(1+2) + \vec{U}_2(-3+1) = 3\vec{U}_1 - 2\vec{U}_2 \\ &= (3, -2) \end{aligned}$$

**مثال ( 14 ) :**

إذا كان  $\vec{A} = (5, -3)$  وكان  $\vec{B} = (-3, 4)$  وكان  $L = 3$  ،  $K = 2$  جد  $K\vec{A} - L\vec{B}$  ثم عبر عنه بدلالة متجهي الوحدة .

**الحل :**

$$\begin{aligned} K\vec{A} - L\vec{B} &= 2(5, -3) - 3(-3, 4) \\ &= (10, -6) + (9, -12) \\ &= (19, -18) \\ &= 19\vec{U}_1 - 18\vec{U}_2 \end{aligned}$$

## تمريبات ( 2 - 5 )

س 1 /

جد مقدار واتجاه كل من المتجهات الآتية موضحاً بالرسم :

$$(-2, -2), (3, 0), \sqrt{3} \vec{U}_1 + \vec{U}_2, -\vec{U}_1 + \sqrt{3} \vec{U}_2$$

س 2 /

بسط ما يأتي:

$$4(1, -1), 2(1, -1), -7(1, 5), 3(2, -1) + 4(-1, 5), 7(3\vec{U}_1 + 2\vec{U}_2), -4(2\vec{U}_1 - \vec{U}_2)$$

س 3 /

عبّر عن كل من المتجهات الآتية بواسطة متجهي الوحدة  $\vec{U}_1, \vec{U}_2$ :

$$(-1, 4), (-3, -5), (0, -1), (5, 3), (2, 0), (2, 3)$$

س 4 /

إذا كان  $\vec{E} = (x, y)$  حيث  $x, y \in \mathbb{R}$  وكان  $\vec{A}$  أي متجه بحيث

$$\vec{E} = (0, 0) \text{ برهن على أن } \vec{A} + \vec{E} = \vec{E} + \vec{A} = \vec{A}$$

س 5 /

إذا كان  $\vec{A} = -\vec{B}$  أثبت أن  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = (0, 0)$

س 6 /

إذا كان  $\vec{A} = (\sqrt{3}, 1), \vec{B} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}), K = 3, L = -2$

فجد كلاً مما يأتي :  $K\vec{B}, L\vec{A}, \vec{A} + \vec{B}, K\vec{A} + \vec{B}, K\vec{A} - \vec{B}, K\vec{A} + L\vec{B}$

$$K\vec{A} - L\vec{B}, K(\vec{A} + \vec{B}), (L + K)\vec{A}, (L + K)(\vec{A} + \vec{B}),$$

$$K(L\vec{A} + K\vec{B}), KL(\vec{A} - \vec{B})$$

س 7 /

حل السؤال 6 بالتعبير عن كل متجه من المتجهات بواسطة متجهي الوحدة  $\vec{U}_1, \vec{U}_2$

س 8 /

عبّر عن المتجهات الآتية بواسطة متجهي الوحدة  $\vec{U}_1, \vec{U}_2$

$$(أ) \text{ متجه طوله 3 وإتجاهه } \frac{\pi}{3}, (ب) \text{ متجه طوله 10 وإتجاهه } \frac{\pi}{6}$$

$$(ج) \text{ متجه طوله 5 وإتجاهه } \frac{\pi}{4}, (د) \text{ متجه طوله } \frac{3}{4} \text{ وإتجاهه } \pi$$

س 9 /

إذا كان  $\vec{A} = (5, 2), \vec{B} = (2, -4)$  جد  $x$  بحيث :  $2\vec{A} + 3x = 5\vec{B}$

- [6-1] النظام الاحداثي .  
 [6-2] المسافة بين نقطتين معلومتين .  
 [6-3] احداثيات نقطة تقسيم مستقيم معلوم ( من الداخل ) .  
 [6-4] ميل المستقيم .  
 [6-5] شرط التوازي .  
 [6-6] شرط التعامد .  
 [6-7] معادلة المستقيم .  
 [6-8] بُعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم .

### الاهداف السلوكية

يهدف هذا الفصل في دراسته بان يكون الطالب قادراً على ان:

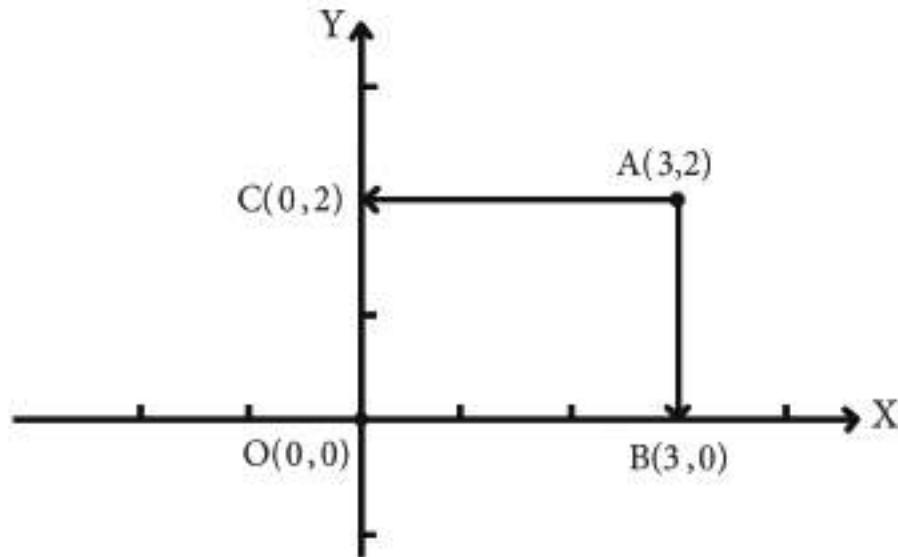
- يتعرف على النظام الاحداثي
- يوجد البعد بين نقطتين في المستوى الاحداثي
- يوجد احداثي نقطة منتصف قطعة مستقيمة
- يوجد احداثي نقطة تقسيم قطعة مستقيمة
- يتعرف على معادلة من الدرجة الاولى بمتغيرين
- يتعرف على ميل المستقيم
- يوجد معادلة من الدرجة الاولى بمتغيرين
- يميز بين المستقيمان المتوازيان والمتعامدان من خلال ميليهما
- يوجد بُعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم

الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	المسافة بين نقطتين
$(\frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2}, \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2})$	احداثيات نقطة تقسيم نسبته $\frac{n_1}{n_2}$
$L_1 // L_2 \iff m_1 = m_2$	توازي المستقيمين $L_1, L_2$
$L_1 \perp L_2 \iff m_1 \times m_2 = -1$	تعامد المستقيمين $L_1, L_2$
$ax + by + c = 0$	معادلة المستقيم
$D = \frac{ ax_1 + by_1 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$	المسافة بين نقطة ومستقيم D

[6-1] النظام الاحداثي في المستوي:

تعلم أنه إذا رسمنا في المستوي مستقيمين متعامدين  $\vec{x}$ ،  $\vec{y}$  ومتقاطعين في (O) ومثلنا الأعداد الحقيقية (R) على كل من هذين المستقيمين وافترضنا أنه O تمثل نقطة الأصل فاننا بذلك نكون قد أنشأنا نظاماً احداثياً في المستوي ونسمي  $\vec{x}$  محور السينات،  $\vec{y}$  محور الصادات وعندما نأخذ أية نقطة في هذا المستوي مثل A ونرسم منها عمودين الأول على محور السينات والآخر على محور الصادات وليكونا  $\overline{AB}$  ،  $\overline{AC}$  على الترتيب لاحظ الشكل (1 - 6) وعندما نكتب A ( 3 , 2 ) عبارة عن زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يأتي الاحداثي السيني أولاً ثم الاحداثي الصادي.

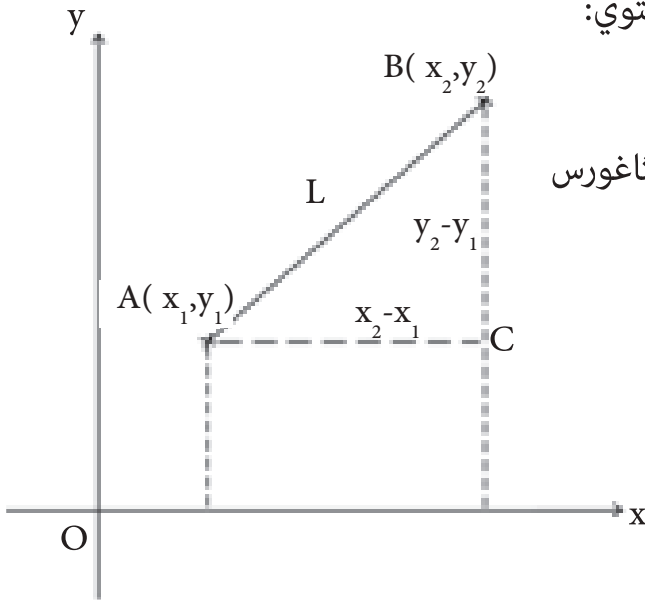
في هذا الفصل سنعتبر ان محوري الاحداثيات متعامدان وأن وحدة الطول المستخدمة في تدرج أحد المحورين هي نفسها المستخدمة في تدرج المحور الآخر .



شكل (1 - 6)

## [ 2 - 6 ] المسافة بين نقطتين معلومتين Distance Between Two Points :

إذا عرفنا إحداثي نقطتين تنتميان الى المستوي فان المسافة بينهما يمكن إيجادها بالطريقة الآتية:



لتكن  $A(x_1, y_1)$  ،  $B(x_2, y_2)$  نقطتين في المستوي:

$\Delta ABC$  قائم الزاوية في  $C$

..... فيثاغورس  $L^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

قانون المسافة بين نقطتين.

أو بطريقة أخرى :

باستخدام الخاصية  $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

$$\vec{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$

$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

شكل (2-6)

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال (1) :

أثبت أنه النقاط  $A(-2, 7)$  ،  $B(-3, 4)$  ،  $C(1, 16)$  تنتمي لمستقيم واحد.

الحل :

الطريقة الأولى :

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (-3, 4) - (-2, 7) = (-1, -3)$$

$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = (1, 16) - (-2, 7) = (3, 9) = -3(-1, -3)$$

$$\therefore \vec{AC} = -3\vec{AB}$$

$\therefore A, B, C$  تنتمي لمستقيم واحد.

$$AB = \sqrt{(-2 + 3)^2 + (7 - 4)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (4 - 16)^2} = \sqrt{16 + 144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(-2-1)^2 + (7-16)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$BC = AB + AC$$

A، B، C تنتمي لمستقيم واحد وإلا لكانت رؤوس مثلث إذ أن مجموع أي ضلعين في أي  $\Delta$  أكبر من الضلع الثالث.

مثال (2) :

برهن أن الـ  $\Delta$  الذي رؤوسه النقاط A (1 , 1) ، B (2 , 2) ، C (5 , -1) هو مثلث قائم الزاوية

الحل :

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$BC = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ لأن } (\sqrt{20})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{18})^2$$

$$20 = 2 + 18 \text{ أي أن}$$

$\Delta ABC$  قائم في B .



مثال ( 3 ) :

بين أن النقاط  $A(-3, -1)$  ،  $B(1, -4)$  ،  $C(10, -5)$  ،  $D(6, -2)$  تمثل رؤوس متوازي أضلاع.

الحل :

$$AB = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (-1 + 4)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(1 - 10)^2 + (-4 + 5)^2} = \sqrt{81 + 1} = \sqrt{82}$$

$$CD = \sqrt{(10 - 6)^2 + (-5 + 2)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$AD = \sqrt{(6 + 3)^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{81 + 1} = \sqrt{82}$$

وحيث أن  $AB = CD$  ،  $BC = AD$

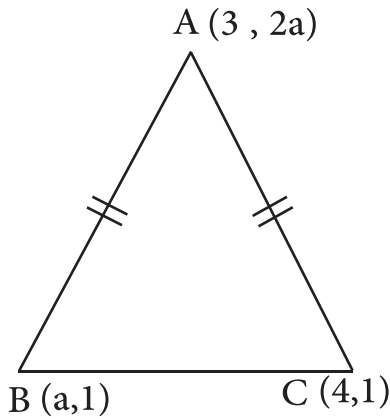
الشكل ABCD يمثل متوازي أضلاع ( لان كل ضلعين متقابلين متساويين ).

مثال ( 4 ) :

إذا كانت النقط  $C(4, 1)$  ،  $B(a, 1)$  ،  $A(3, 2a)$  هي رؤوس مثلث متساوي الساقين فيه  $AB=AC$  جد قيمة  $a \in R$ .

الحل :

معطى  $AB=AC$



$$\Rightarrow \sqrt{(3-a)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{(3-4)^2 + (2a-1)^2}$$

$$\Rightarrow (3-a)^2 + (2a-1)^2 = 1 + (2a-1)^2 \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$\Rightarrow (3-a)^2 = 1 \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$\Rightarrow 3-a = \pm 1$$

$$\text{أما: } 3-a = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\text{أو: } 3-a = -1 \Rightarrow a = 4$$

تهمل (بين سبب ذلك)

## تمرينات ( 1 - 6 )

س 1 /

جد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية:

- أ)  $(0, 0)$  ،  $(3, 4)$  ، ب)  $(1, 2)$  ،  $(6, 4)$  ،  
ج)  $(-3, -5)$  ،  $(5, -1)$  ، د)  $(-1, 4)$  ،  $(-2, 3)$ .

س 2 /

جد محيط المثلث الذي رؤوسه النقاط  $A(5, 7)$  ،  $B(1, 10)$  ،  $C(-3, -8)$ .

س 3 /

رؤوس شكل رباعي هي  $A(4, -3)$  ،  $B(7, 10)$  ،  $C(-8, 2)$  ،  $D(-1, -5)$  جد طول قطريه.

س 4 /

أثبت أن النقاط  $A(3, -2)$  ،  $B(-5, 0)$  ،  $C(0, -7)$  ،  $D(8, -9)$  هي رؤوس متوازي الاضلاع.

س 5 /

إذا كانت  $A(-2, 5)$  ،  $B(3, 3)$  ،  $C(-4, 2)$  ،  $D$  نقطة  
ثلاث رؤوس من متوازي الاضلاع  $ABCD$  جد إحداثي

س 6 /

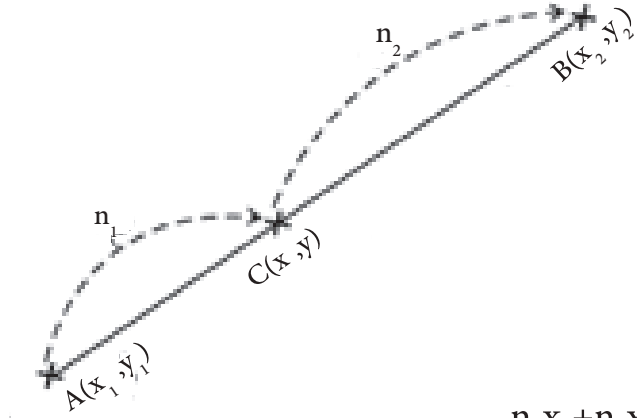
بين أن المثلث الذي رؤوسه  $A(2, 3)$  ،  $B(-1, -1)$  ،  $C(3, -4)$  هو مثلث متساوي الساقين.

س 7 /

أثبت ان النقط  $(0, 0)$  ،  $(6, 8)$  ،  $(-3, -4)$  تقع على استقامة واحدة.

### [6-3] إحداثيات نقطة تقسيم معلوم (من الداخل) :

يقصد بتقسيم قطعة مستقيم من الداخل إيجاد إحداثيات نقطة تقع بين نقطتي نهايتها بحيث تقسمها بنسبة معلومة .



ولنفرض أن  $A = (x_1, y_1)$  ،  $B = (x_2, y_2)$

والمطلوب إيجاد  $C$  التي تقسم  $AB$  من الداخل

بنسبة  $n_1 : n_2$  لذلك نقول : نفرض  $C = (x, y)$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{n_1}{n_2}$$

فان  $X = \frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2}$  كذلك  $Y = \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2}$

نقطة التقسيم  $C = \left( \frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2}, \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2} \right)$

**مثال 4 :**

جد إحداثيات النقطة التي تقسم قطعة المستقيم الواصلة بين النقطتين

$A (4, -3)$  ،  $B (-5, 0)$  بنسبة  $\frac{1}{2}$

**الحل :**

$$x = \frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2} = \frac{1(-5) + 2(4)}{1+2} = \frac{-5+8}{3} = 1$$

$$y = \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2} = \frac{1(0) + 2(-3)}{1+2} = \frac{-6}{3} = -2$$

∴. إحداثيات نقطة التقسيم هي  $(1, -2)$

## نقطة تنصيف القطعة المستقيمة :

نفرض M نقطة تنصيف القطعة المستقيمة AB



حيث  $A(x_1, y_1)$  ،  $B(x_2, y_2)$

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \text{ نقطة المنتصف} \quad \text{فان}$$

وللإثبات إجعل  $n_1 = n_2 = n$  وعوض في القانون السابق .

مثال ( 5 ) :

إذا كانت C منتصف  $\overline{AB}$  حيث  $A(-3, 2)$  ،  $B(7, -8)$

جد إحداثيات النقطة C

الحل :

$$\begin{aligned} C &= \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\ &= \left( \frac{-3 + 7}{2}, \frac{2 + (-8)}{2} \right) \\ C &= (2, -3) \end{aligned}$$

## الخلاصة

النقطة  $C(x, y)$  تقسم القطعة المستقيمة الواصلة بين  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  من الداخل بنسبة

$$C\left(\frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2}, \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2}\right) \text{ هي: } \frac{n_1}{n_2}$$

احداثيات نقطة المنتصف هي:  $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

س 1 /

جد إحداثيات النقطة التي تقسم القطعة المستقيمة  $AB$  ، حيث  $A(1, 3)$  ،  $B(4, 6)$  بنسبة  $\frac{2}{1}$  .

س 2 /

جد إحداثيات النقطة التي تنصف قطعة المستقيم  $AB$  حيث أن  $A(2, -4)$  ،  $B(-3, -6)$  .

س 3 /

جد إحداثيات النقطة  $C$  التي تقسم قطعة المستقيم  $AB$  بنسبة  $\frac{3}{5}$  حيث أن  $A(2, 1)$  ،  $B(1, -3)$

س 4 /

جد إحداثيات النقطة  $C$  التي تبعد عن  $A$  ثلاثة أمثال بعدها عن  $B$  حيث  $A(2, 6)$  ،  $B(4, -4)$

س 5 /

جد إحداثيات منتصفات أضلاع  $\Delta ABC$  حيث:  $A(4, 0)$  ،  $B(5, 2)$  ،  $C(2, -3)$  ثم جد أطوال المستقيمتين الواصلتين بين رؤوس المثلث ومنتصفات الأضلاع المقابلة.

س 6 /

بين أن قطري الشكل الرباعي الذي رؤوسه  $(-5, -8)$  ،  $(-3, -3)$  ،  $(1, 3)$  ،  $(-1, -2)$  ينصف أحدهما الآخر.

### تعريف (1 - 6)

إذا كانت  $A (x_1, y_1)$  ،  $B (x_2, y_2)$  فان  
ميل المستقيم  $AB = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  بشرط  $x_1 \neq x_2$  .

ملاحظة :

(1) إذا كان  $y_2 - y_1 = 0$  يعني أن ميل  $\overleftrightarrow{AB}$  = صفرًا  
أي أن  $\overleftrightarrow{AB} //$  محور السينات .

بمعنى أن ميل محور السينات = ميل كل مستقيم موازٍ له = صفر.

(2) إذا كان  $x_2 - x_1 = 0$  يعني أن ميل  $\overleftrightarrow{AB}$  غير معرف  
أي أن  $\overleftrightarrow{AB} //$  محور الصادات .

بمعنى أن ميل محور الصادات = ميل كل مستقيم موازياً له ويكون غير معرف .

(3) إذا كانت  $Q$  قياساً للزاوية الموجبة التي يصنعها  $\overleftrightarrow{AB}$  مع الاتجاه الموجب لمحور  
السينات فان ميل  $\overleftrightarrow{AB}$  يساوي  $\tan Q$  حيث  $Q \in [0, 180^\circ) / \{90^\circ\}$  .

مثال (6) :

جد ميل المستقيم المار بالنقطتين  $A (2, 3)$  ،  $B (5, 1)$

الحل :

$$m \overleftrightarrow{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 3}{5 - 2} = \frac{-2}{3}$$

## [ 5 - 6 ] شرط التوازي Parallel Condition :

المستقيمان المتوازيان لهما الميل نفسه وبالعكس أي  $L_1 // L_2$  إذا فقط إذا  $m_1 = m_2$  .

مثال ( 7 ) :

بين ان النقاط ( 1 , 0 ) ، B ( 2 , 1 ) ، A ( 4 , 3 ) تنتمي لمستقيم واحد .

الحل :

$$m_{\overline{AB}} = \frac{1 - 3}{2 - 4} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$m_{\overline{BC}} = \frac{0 - 3}{1 - 2} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$m_{\overline{AB}} = m_{\overline{BC}} \therefore$$

$\therefore$  A ، B ، C تنتمي لمستقيم واحد .

## [ 6 - 6 ] شرط التعامد Perpendicular Condition :

إذا تعامد مستقيمان فان حاصل ضرب ميلاهما = -1 وبالعكس أي  $L_1 \perp L_2$  إذا فقط إذا

$$m_1 \times m_2 = -1$$

او  $m_1 = \frac{-1}{m_2}$  أي ميل أحدهما يساوي مقلوب الآخر بعكس الإشارة مثلاً إذا كان ميل مستقيم

يساوي  $\frac{-3}{4}$  فاي مستقيم يوازيه يكون ميله =  $\frac{-3}{4}$  وأي مستقيم عمود عليه يكون ميله  $\frac{4}{3}$  .

مثال ( 8 ) :

برهن باستخدام الميل أن المثلث الذي رؤوسه  $A (3 , -1)$  ،  $B (10, 4)$  ،  $C (5 , 11)$  هو قائم الزاوية في  $B$  ؟

الحل :

$$m_{\overline{AB}} = \frac{4 - (-1)}{10 - 3} = \frac{5}{7} , \quad m_{\overline{BC}} = \frac{11 - 4}{5 - 10} = \frac{7}{-5}$$

$$m_{\overline{AB}} \times m_{\overline{BC}} = \frac{5}{7} \times \frac{7}{-5} = -1 \quad \therefore$$

$$\overline{AB} \perp \overline{BC} \quad \therefore$$

$\therefore \Delta ABC$  قائم الزاوية في  $B$  .

مثال ( 9 ) :

إذا كانت النقط  $A (0 , b)$  ،  $B (-1, 2)$  ،  $C (-2 , b-4)$  على استقامه واحدة جد قيمة  $b \in \mathbb{R}$  .

الحل :

على استقامه واحدة  $A, B, C$   $\therefore$

$$\Rightarrow m_{\overline{AB}} = m_{\overline{BC}}$$

$$\Rightarrow \frac{2 - b}{-1 - 0} = \frac{(b - 4) - 2}{-2 + 1}$$

$$\frac{2 - b}{-1} = \frac{b - 6}{-1} \Rightarrow 2 - b = b - 6$$

$$\Rightarrow b = 4$$

ملاحظة :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



## تمرينات ( 3 - 6 )

س 1 /

(1) جد ميل المستقيم المار بالنقطتين  $(2, 0)$  ،  $(0, -2)$ .

(2) بين أن النقاط ،  $(6, -7)$  ،  $(4, -1)$  ،  $(3, 2)$  على إستقامة واحدة.

(3) إذا كانت  $A(2, 3)$  ،  $B(-3, h)$  جد قيمة  $h$  بحيث يكون  $m \overline{AB} = \frac{1}{2}$

(4)  $ABC$  مثلث رؤوسة  $A(1, 6)$  ،  $B(-2, -8)$  ،  $C(7, -2)$

جد ميل المستقيم المتوسط للمثلث  $ABC$  المار من  $B$ .

س 2 /

لكل فقرة فيما يأتي أربع إجابات واحدة فقط منها صحيحة ، حدد الاجابة الصحيحة لكل فقرة :

(1) إذا كان  $\overleftrightarrow{H} \perp \overleftrightarrow{L}$  ، يمر بالنقطتين  $(2, 3)$  ،  $(1, 5)$  فان ميل  $\overleftrightarrow{L}$  يساوي

(أ)  $\frac{1}{2}$  ، (ب)  $-2$  ، (ج)  $\frac{2}{3}$  ، (د)  $-\frac{2}{3}$

(2) إذا كان  $\overleftrightarrow{H} \parallel \overleftrightarrow{L}$  ، يمر بالنقطتين  $(3, -2)$  ،  $(-3, 2)$  فان ميل  $\overleftrightarrow{L}$  يساوي

(أ)  $\frac{3}{2}$  ، (ب)  $-\frac{3}{2}$  ، (ج)  $\frac{2}{3}$  ، (د)  $-\frac{2}{3}$

(3) اذا كان المستقيم  $\overleftrightarrow{H} \parallel \overleftrightarrow{L}$  ،  $(-1, 5) \in \overleftrightarrow{L}$  ،  $(-1, 3) \in \overleftrightarrow{H}$  ،  $(x, 6) \in \overleftrightarrow{H}$  ،  $(3, 4) \in \overleftrightarrow{H}$  فان

قيمة  $x$  يساوي (أ)  $-3$  ، (ب)  $3$  ، (ج)  $1$  ، (د) ليس اياً مما سبق صحيح.

(1) باستخدام الميل بين ان النقاط  $A(5, 2)$  ،  $B(-2, 1)$ ،  $C(2, -2)$  هي رؤوس  $\Delta$  قائم الزاوية.

(2) لتكن  $A(-1, 5)$ ،  $B(5, 1)$ ،  $C(6, -2)$ ،  $D(0, 2)$  بين ان الشكل ABCD متوازي اضلاع.

(3) لتكن  $A(5, 2)$ ،  $B(2, -1)$ ،  $C(-1, 2)$ ،  $D(2, 5)$  بين ان الشكل ABCD مربع.

(4) ABC مثلث رؤوسه  $A(2, 4)$  ،  $B(6, 0)$ ،  $C(-2, -3)$  جد:

أ) ميل العمود المرسوم من A على  $\overline{BC}$ .

ب) ميل المستقيم المرسوم من B وموازياً  $\overline{AC}$ .

(5) بين ان الشكل الرباعي الذي رؤوسه  $A(-2, 2)$  ،  $B(2, -2)$  ،  $C(4, 2)$  ،  $D(2, 4)$  يمثل

شبه منحرف متعامد القطرين.

(6) جد قيمة x التي تجعل المستقيم المار بالنقطتين  $(-2, -9)$ ،  $(x, 4)$  عموداً على المستقيم

المار بالنقطتين  $(0, 3)$  ،  $(4, 1)$ .

## [6-7] معادلة المستقيم Equation of The Line :

إذا كانت  $(x, y)$  أية نقطة من نقاط أي مستقيم فإن العلاقة بين  $x, y$  تسمى معادلة ذلك المستقيم .

والمعادلة القياسية العامة للمستقيم هي:  $ax + by + c = 0$

1. المستقيم الذي يقطع المحورين يمكن تمثيله بيانياً بوضع  $x = 0$

$$\therefore y = \frac{-c}{b}$$

$$\text{بوضع } y = 0 \iff x = \frac{-c}{a}$$

2. وعندما يكون  $b = 0$  يكون  $ax + c = 0$  تمثل معادلة مستقيم يوازي المحور الصادي ومنها  $x = 0$  تمثل معادلة المحور الصادي.

3. وعندما يكون  $a = 0$  يكون  $by + c = 0$  تمثل معادلة مستقيم يوازي المحور السيني ومنها  $y = 0$  تمثل معادلة المحور السيني.

4. وعندما يكون  $c = 0$  يكون  $ax + by = 0$  تمثل معادلة مستقيم يمر من نقطة الأصل.

### كيفية إيجاد معادلة المستقيم :

1. إذا علمت منه نقطتان:

معادلة المستقيم  $AB$  حيث  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  :

لتكن  $C(x, y) \in \overleftrightarrow{AB}$  فإن:

قانون إيجاد معادلة المستقيم بدلالة نقطتين.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

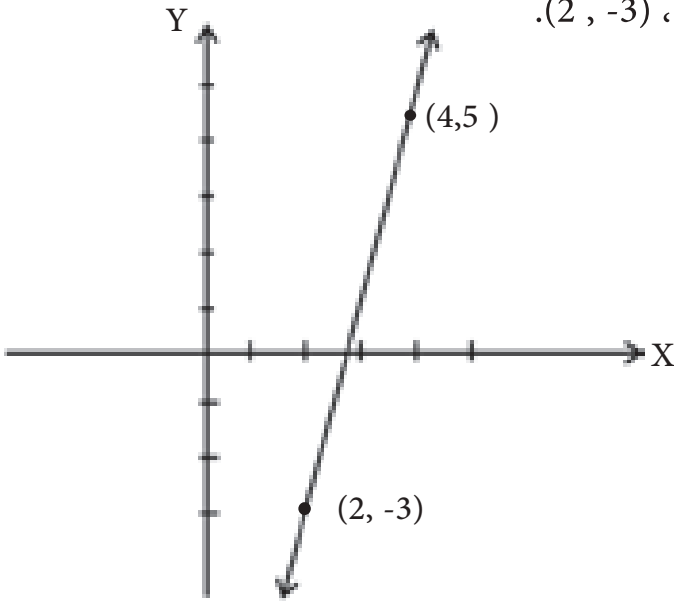
2. إذا علمت منه نقطة وميل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ من القانون السابق}$$

..... قانون إيجاد معادلة المستقيم بدلالة نقطة وميل .  $y - y_1 = m(x - x_1)$

مثال 9 :

جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (2, -3) ، (4, 5).



الحل :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

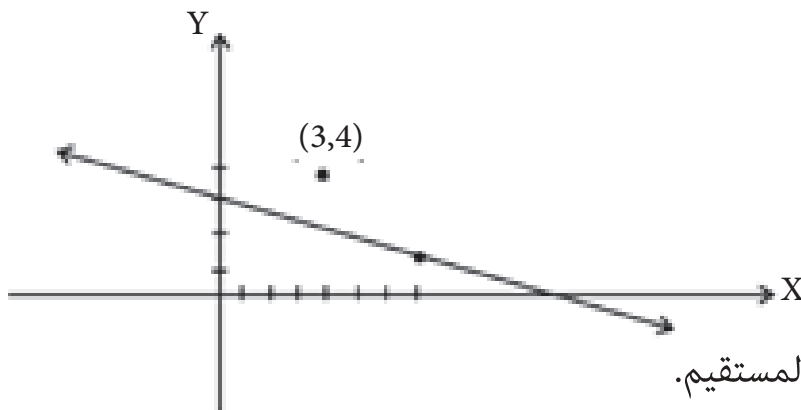
$$\frac{y + 3}{x - 2} = \frac{5 + 3}{4 - 2}$$

$$\frac{y + 3}{x - 2} = \frac{4}{1}$$
$$y + 3 = 4x - 8$$

∴ ..... معادلة المستقيم.  $4x - y - 11 = 0$

مثال 10 :

جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (0,3) ، (7,1)، وهل ان النقطة (3, 4) تنتمي اليه ام لا؟



الحل :

$$\frac{y - 1}{x - 7} = \frac{3 - 1}{0 - 7}$$

$$2x - 14 = -7y + 7$$

..... معادلة المستقيم.  $2x + 7y - 21 = 0$

لكي نتأكد ان (3, 4) تنتمي للمستقيم ام لا، نعوض عن  $x = 3$  ،  $y = 4$  في معادلة المستقيم .

$$2(3) + 7(4) - 21 \stackrel{?}{=} 0$$

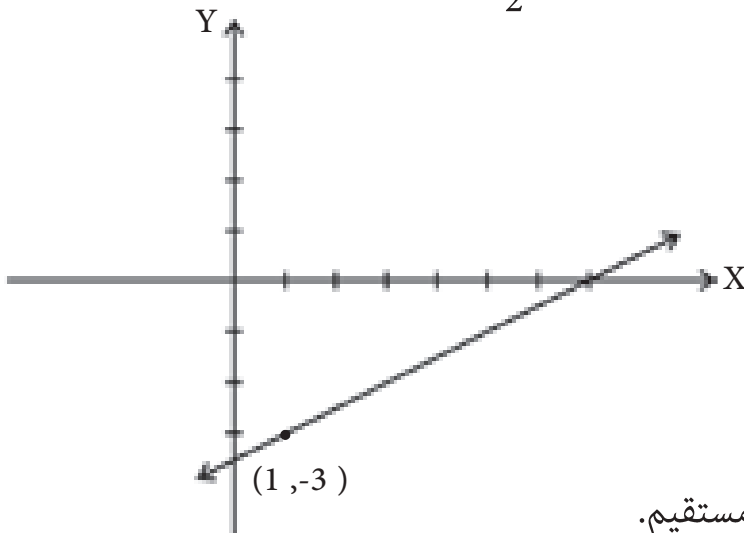
$$6 + 28 - 21 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\therefore 13 \neq 0$$

∴ النقطة (3, 4) لاتتمي للمستقيم .

مثال ( 11 ) :

جد معادلة المستقيم المار من النقطة (1, -3) وميله  $\frac{1}{2}$  .



الحل :

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

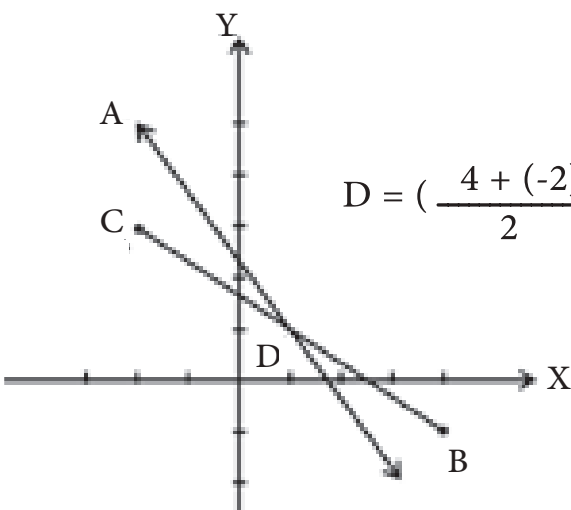
$$y + 3 = \frac{1}{2} (x - 1)$$

$$2y + 6 = x - 1$$

$$x - 2y - 7 = 0 \dots\dots\dots \text{معادلة المستقيم.}$$

مثال ( 12 ) :

جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة A(-2, 5) ونقطة تنصيف القطعة المستقيمة التي نهايتها النقطتان B (4, -1)، C (-2, 3) .



الحل :

$$\text{لتكن } D = \left( \frac{4 + (-2)}{2}, \frac{-1 + 3}{2} \right) = (1, 1) \leftarrow \overline{BC} \text{ منتصف}$$

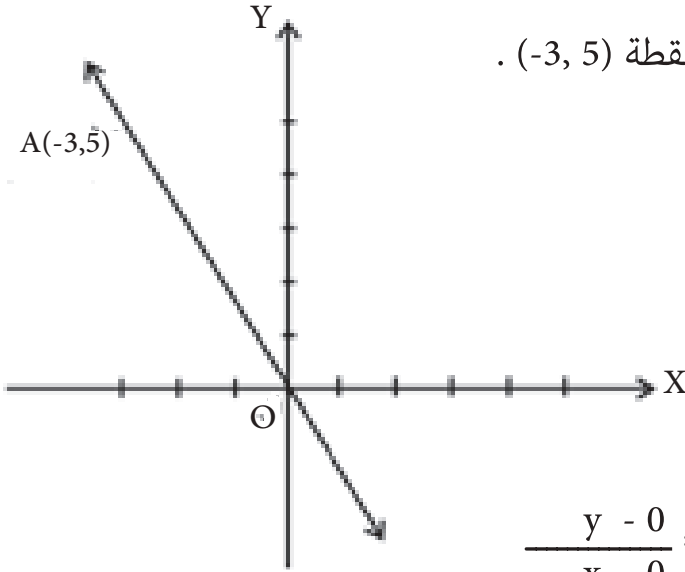
$$\text{معادلة } \overline{AD} \text{ هي : } \frac{y - 5}{x + 2} = \frac{1 - 5}{1 + 2}$$

$$\therefore 3y - 15 = -4x - 8$$

$$4x + 3y - 7 = 0 \dots\dots\dots \text{معادلة المستقيم.}$$

مثال 13 :

جد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل والنقطة  $(-3, 5)$  .



الحل :

$O(0, 0)$  ،  $A(-3, 5)$  .

معادلة المستقيم  $OA$  هي :  $\frac{y - 0}{x - 0} = \frac{5 - 0}{-3 - 0}$

$$\frac{y}{x} = \frac{5}{-3}$$

$5x + 3y = 0$  ..... معادلة المستقيم .

يمكن ايجاد ميل المستقيم من معادلته:

نفرض ان معادلة المستقيم:  $ax + by + c = 0$



ميل المستقيم =  $\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$  بعكس الاشارة بشرط  $x, y$  في طرف واحد من المعادلة

وان  $b \neq 0$

∴ ميل المستقيم =  $-\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$

اي ميل المستقيم =  $\frac{-a}{b}$

مثال 14 :

جد الميل والمقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته:

$$3x - 4y - 12 = 0$$

الحل :

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

المقطع الصادي: نعوض عن  $x = 0$

$$-4y - 12 = 0 \Rightarrow y = -3$$

مثال 15 :

جد معادلة المستقيم الذي يصنع من الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها  $150^\circ$  ويمر بالنقطة  $(1, -4)$ .

الحل :

$$m = \tan 150^\circ \quad \text{ميل المستقيم}$$

$$= \tan (180^\circ - 30^\circ)$$

$$= -\tan 30^\circ$$

$$m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\therefore y + 4 = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x - 1)$$

$$x + \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} - 1 = 0 \quad \text{معادلة المستقيم . . . . .}$$

### مثال 16 :

جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة  $(-2,1)$  وعمودياً على المستقيم الذي معادلته

$$2x - 3y - 7 = 0$$

من المستقيم  $2x - 3y - 7 = 0$

الحل :

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \quad \therefore \text{ميل المستقيم :}$$

$$\therefore \text{ميل المستقيم المطلوب} = \frac{-3}{2} \quad (\text{لأنه عمودياً عليه}).$$

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-3}{2} (x + 2)$$

$$\text{..... معادلة المستقيم المطلوب} \quad 3x + 2y + 4 = 0$$

### الخلاصة

$$(1) \text{ ميل المستقيم المار بالنقطتين } (x_2, y_2), (x_1, y_1) \text{ هو } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$(2) \text{ ميل المستقيم } ax + by + c = 0 \text{ هو } m = \frac{-a}{b}$$

(3) ميل المستقيم الذي يصنع الزاوية  $\theta$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو  $m = \tan \theta$

$$(4) \text{ معادلة المستقيم المار بالنقطتين } (x_2, y_2), (x_1, y_1) \text{ هو } \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$(5) \text{ معادلة المستقيم المار بالنقطة } (x_1, y_1) \text{ وميل } m \text{ هو } y - y_1 = m(x - x_1)$$



## تمرينات ( 4 - 6 )

س 1 /

1. جد معادلة المستقيم الذي ميله  $= \frac{-1}{2}$  ويمر بالنقطة  $(-4, 0)$ .
2. جد معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة  $(2, -1)$ .
3. جد معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة  $(-1, 2)$ .
4. جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين  $(-1, 3)$ ،  $(-1, 5)$ .
5. جد معادلة المستقيم  $L$  المار بالنقطة  $(2, -1)$  والموازي الى  $L_1$  الذي ميله  $= \frac{2}{3}$ .
6. جد معادلة المستقيم المار بالنقطة  $(0, -2)$  وعمودياً على المستقيم الذي ميله  $= \frac{-3}{5}$ .
7. جد معادلة المستقيم المار بالنقطة  $(-4, 3)$  وعمودياً على المستقيم المار بالنقطتين  $(2, -2)$ ،  $(0, 3)$ .

8. لتكن  $A(4, -2)$ ،  $B(1, 2)$  جد معادلة المستقيم العمود الذي ينصف  $\overline{AB}$

س 2 /

1. جد معادلة المستقيم الذي ميله  $= -3$  ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله 7 وحدات
2. جد معادلة المستقيم الذي ميله  $= 2$  ويقطع جزءاً سالباً من محور السينات طوله 6 وحدات
3. جد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات لكل مستقيم فيما يأتي:

$$\overleftrightarrow{L_1}: 2x - 3y + 5 = 0 \quad \text{أ.}$$

$$\overleftrightarrow{L_2}: 8y = 4x + 16 \quad \text{ب.}$$

$$\overleftrightarrow{L_3}: 3y = -4 \quad \text{ج.}$$

4. جد معادلة المستقيم المار بالنقطة  $(-5, 2)$  ويوازي المستقيم الذي معادلته :

$$2x - y + 3 = 0$$

5. جد معادلة المستقيم L الذي يقطع جزءاً سالباً من محور الصادات طوله 4 وحدات وعمودياً على المستقيم  $2y = 4x - 1$ .

6. ليكن  $\overleftrightarrow{L}$  مستقيماً معادلته:  $x + y - 2 = 0$  جد ميله ونقطة تقاطعه مع محور الصادات ثم ارسم  $\overleftrightarrow{L}$

7. جد معادلة المستقيم L المار بالنقطة  $(2, -2)$  وعمودياً على المستقيم الذي معادلته

$x + y = 0$  ثم جد نقطة تقاطع المستقيم L مع المحورين الاحداثيين.

8. المستقيم  $L : 2x - y = 3$  والمستقيم  $H : 3x + 6y = -3$

أ. بين ان  $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{H}$

ب. جد جبرياً نقطة تقاطع المستقيمين H ، L .

9. جد معادلة المستقيم الذي يصنع  $135^\circ$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات والمار بنقطة الاصل.

10. المستقيم  $L : 2y = ax + 1$  يمر بالنقطة  $(1, 2)$  جد :

أ) قيمة  $a \in \mathbb{R}$

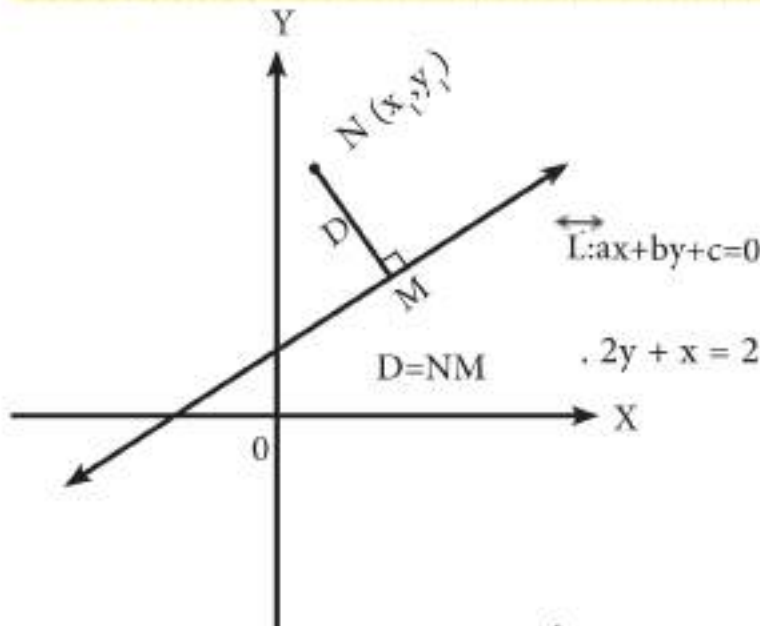
ب) ميل المستقيم L

ج) مقطعه الصادي

### تعريف (2-6)

إذا كان المستقيم  $L: ax + by + c = 0$  والنقطة  $N(x_1, y_1)$  معلومة فيعرف بعد النقطة  $N$  عن المستقيم  $L$  بأنه المسافة العمودية ( $D$ ) بين النقطة  $N$  والمستقيم  $L$  وتعطى بالعلاقة الآتية :

... قانون البعد 
$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



مثال (17) :

جد بُعد النقطة  $A(1,3)$  عن المستقيم  $: 2y + x = 2$ .

الحل :

نضع المعادلة بالشكل الآتي :  $x + 2y - 2 = 0 \iff a = 1, b = 2, c = -2$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(1)(1) + (2)(3) - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2}}$$

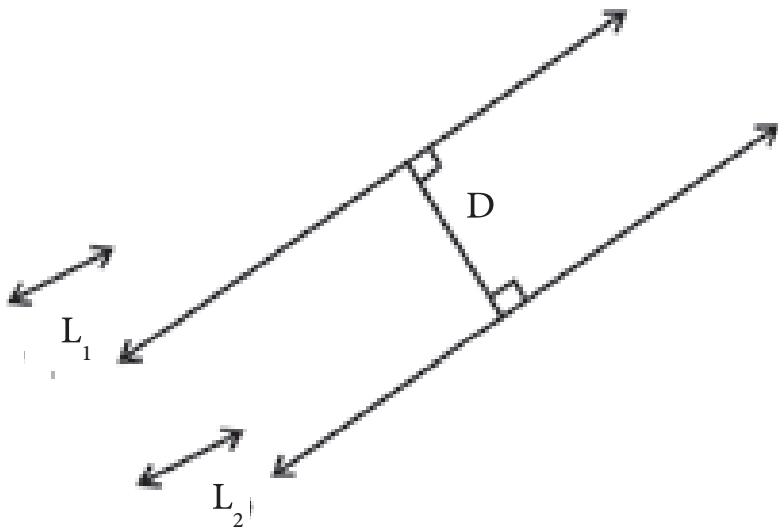
$$D = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \text{ unit}$$

يمكن إيجاد البعد بين المستقيمين المتوازيين

حيث  $\iff L_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0, \iff L_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$$\frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \text{البعد بين } L_1, L_2$$

مثال 18 :



جد البعد بين المستقيمين المتوازيين:

$$\overleftrightarrow{L_1}: x - 3y = 1, \overleftrightarrow{L_2}: x - 3y = 4$$

الحل:

البعد بين مستقيمين متوازيين هو بعد أي نقطة تنتمي لأحدهما عن الآخر .

$$\overleftrightarrow{L_1}: y = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ لذا في:}$$

∴ النقطة (1, 0)

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \therefore$$

$$D = \frac{|(1)(1) - 3(0) - 4|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

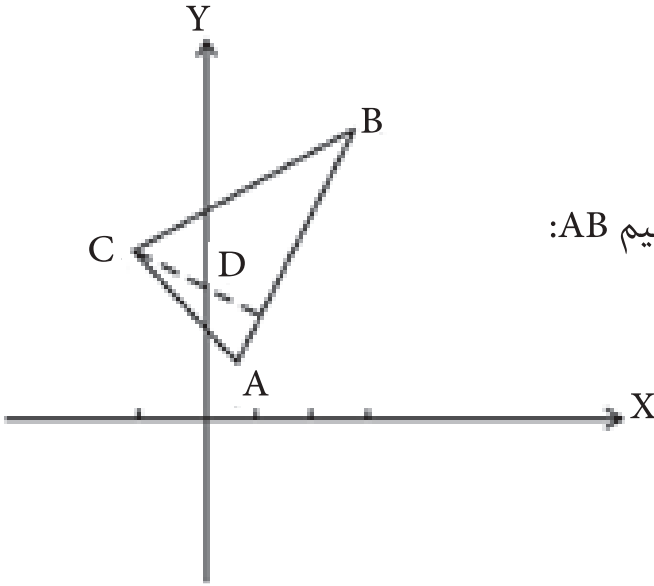
حل آخر حسب النتيجة :

$$D = \frac{|4 - 1|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

مثال 19 :

جد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط A (1,2) ، B (3 ,5) ، C ( -1 ,3)

الحل :



نجد معادلة احد اضلاع المثلث وليكن المستقيم AB:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{5 - 2}{3 - 1} \Rightarrow \frac{y - 2}{x - 1} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 3x - 2y + 1 = 0$$

الآن بعد النقطة C (-1,3) عن المستقيم AB يمثل ارتفاع  $\Delta ABC$

$$D = \frac{|3(-1) - 2(3) + 1|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{8}{\sqrt{13}} \text{ unit}$$

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \text{ نجد طول}$$

$$\text{Area } \Delta = \frac{1}{2} (AB) \cdot D$$

$$= \frac{1}{2} \times (\sqrt{13}) \cdot \frac{8}{\sqrt{13}} = 4 \text{ unit}^2$$

## تمرينات ( 5 - 6 )

### س 1 /

ضع علامة (✓) اذا كانت العبارة صائبة وعلامة (×) اذا كانت العبارة خاطئة فيما يأتي :

1. بعد نقطة الاصل عن المستقيم:  $y = 3$  هو 3 وحدات.
2. بعد نقطة الاصل عن المستقيم:  $y = -5$  هو 5 وحدات.
3. بعد نقطة الاصل عن المستقيم:  $x = -5$  هو 5 وحدات.
4. البعد بين المستقيمين المتوازيين:  $y = 4$ ،  $y = -1$  هو 3 وحدات.

### س 2 /

1. جد بعد النقطة  $(-2, 1)$  عن المستقيم:  $6x + 8y - 21 = 0$
2. جد بعد نقطة الاصل عن المستقيم الذي ميله  $= \frac{1}{3}$  ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله 4 وحدات.

3. جد البعد بين المستقيمين المتوازيين:

$$\longleftrightarrow L_1: 8x - 6y + 4 = 0$$

$$\longleftrightarrow L_2: 4x - 3y - 1 = 0$$

4. جد بعد النقطة  $(0, -2)$  عن المستقيم المار بالنقطتين  $A(1, -1)$ ،  $B(3, 5)$ .

5. جد مساحة المثلث ABC حيث  $A(-4, 6)$ ،  $B(-3, -1)$ ،  $C(5, -2)$ .

[7-1] مقياس النزعة المركزية .

[7-2] الوسط الحسابي .

[7-3] الوسيط .

[7-4] المنوال .

[7-5] مقياس التشتت .

### الاهداف السلوكية

- ان من اهم الاهداف السلوكية التي يهدف اليها تدريس الاحصاء:

- يتعرف على معنى الوسط الحسابي

- يتمكن من ايجاد الوسط الحسابي

- يتعرف على الوسيط

- يتمكن من ايجاد الوسيط

- يتعرف على المنوال

- يتمكن من ايجاد المنوال

- يتعرف على الانحراف المعياري

- يتمكن من ايجاد الانحراف المعياري

- يتعرف على معامل الارتباط

- يتمكن من ايجاد معامل الارتباط

الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
$\bar{X}$	الوسط الحسابي
ME	الوسيط
MO	المنوال
R	المدى
S	الانحراف المعياري
r	معامل الارتباط

[ 7 - 1 ] مقاييس النزعة المركزية *Measures of Central Tendency* :

اخذنا في المراحل الدراسية السابقة طرائق جمع البيانات وعرضها جدولياً وبيانياً والان نريد ان نبحث عن مقياس يكون معبراً عن الظاهرة موضوع الدراسة وممثلاً لها، أي نريد الحصول على قيمة واحدة تعبر عن جميع القيم. فمتوسط الدخل مثلاً في بلد يعبر عن جميع الدخول في هذا البلد أي يعبر عن المستوى العام للدخل.

ومن خصائص البيانات، ان لها نزعة او ميلاً لانها تتركز حول قيمة معينة متوسطة وهذه القيم التي تتركز حولها البيانات تسمى بالمتوسطات او مقاييس النزعة المركزية.

وسوف نتناول اهم مقاييس النزعة المركزية بشيء من التوسع بعد ان درستها في المرحلة المتوسطة بشكل بسيط وهي:

– الوسط الحسابي.

– الوسيط.

– المنوال.

وتختلف هذه المقاييس الثلاثة من حيث الفكرة وطريقة الحساب كما لكل منها مزاياه وعليه عيوبه. وتوجد بعض الحالات التي يستخدم فيها احد المقاييس من دون الاخر.



### تعريف ( 1 - 7 )

يعرف الوسط الحسابي لمجموعة من القيم بأنه القيمة التي لو حلت محل قيمة كل مفردة في المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة مساوياً لمجموع القيم الأصلية. وبالتالي فإن الوسط الحسابي يساوي مجموع القيم على عددها .

طريقة حسابه :

### الطريقة الأولى

1) اذا كانت المعلومات الاحصائية ( البيانات ) غير مبوبة :

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad \text{وبالرموز :}$$

مثال ( 1 ) :

اذا كانت اعمار خمسة اشخاص هي: 5,8,9,11,12 سنة احسب الوسط الحسابي لاعمار هؤلاء الاشخاص.

الحل :

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{12 + 11 + 9 + 8 + 5}{5}$$
$$\frac{45}{5} = 9 \text{ سنوات}$$

## (2) اذا كانت البيانات مبوبة :

اذا كانت القيم الاحصائية متجمعة في توزيع تكراري فيمكن استخدام القانون الاتي:  
الوسط الحسابي =  $\frac{\text{مجموع حاصل ضرب كل مركز فئة في تكرارها}}{\text{مجموع التكرارات}}$

$$\bar{X} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

مثال ( 2 ) :

لنفرض وجود (3) اشخاص عمر كل منهم 8 سنوات، و (5) اشخاص عمر كل منهم 9 سنوات، و (4) اشخاص عمر كل منهم 11 سنة، وشخصين عمر كل منهم 12 سنة كما في الجدول الاتي:

العمر	8	9	11	12
عدد الاشخاص	3	5	4	2

( هذا الجدول من دون فئات ) فيكون العدد ( العمر ) هو الذي يمثل مركز الفئة ، احسب الوسط الحسابي للعمر.

الحل :

العمر (x)	التكرار (f)	العمر × التكرار (x f)
8	3	8 × 3 = 24
9	5	9 × 5 = 45
11	4	11 × 4 = 44
12	2	12 × 2 = 24
المجموع	14	137

اذا رمزنا للعمر بالرمز x ولعدد الاشخاص او التكرار بالرمز f فان خطوات الحل يمكن تبسيطها كما في الجدول التالي :

$$\bar{X} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{137}{14} \quad \therefore \\ &= 9.786 \text{ سنة} \\ &(\text{الوسط الحسابي للعمر}) \end{aligned}$$

ولنتقدم خطوة اخرى وناخذ حالة الجداول التكرارية ذات الفئات .

مثال (3) :

الجدول التالي يبين توزيع مئة شخص حسب فئات الوزن بالكيلوغرام. والمطلوب حساب الوسط الحسابي للوزن ؟

فئات الوزن	30-	40-	50-	60-	70-	80-90	المجموع
عدد الاشخاص	9	15	22	25	18	11	100

الحل :

$$35 = \frac{30 + 40}{2} = \text{نجد مركز الفئة (x) : مركز الفئة الأولى}$$

$$\text{مركز الفئة الثانية} = 10 + 35 = 45 \dots\dots\dots \text{وهكذا.}$$

وبالتالي فان خطوات الحل هي :

(1) حساب مراكز الفئات ونرمز لها (x).

(2) نضرب مركز الفئة (x) في تكرارها (f)

(3) نجد الوسط الحسابي من العلاقة:

فئات الوزن	التكرار (f)	مراكز الفئات (x)	x × f
30-	9	35	315
40-	15	45	675
50-	22	55	1210
60-	25	65	1625
70-	18	75	1350
80- 90	11	85	935
المجموع	100		6110

$$\bar{X} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \dots\dots\dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots\dots\dots + f_n}$$

$$\bar{X} = \frac{6110}{100}$$

$$\bar{X} = 61.1 \text{ كيلو غرام}$$

جد الوسط الحسابي من الجدول التكراري الآتي :

الفئات	8-	10-	12-	14-	16-	18-20	المجموع
التكرار	5	15	20	10	6	4	60

الحل :

الفئات	التكرار (f)	مراكز الفئات (x)	x × f
8-	5	9	45
10-	15	11	165
12-	20	13	260
14-	10	15	150
16-	6	17	102
18- 20	4	19	76
المجموع	60		798

$$\bar{X} = \frac{798}{60}$$

$$\bar{X} = 13.3$$

الوسط الحسابي

### الطريقة الثانية

#### طريقة الوسط الفرضي أو الانحرافات :

تعتمد هذه الطريقة على إختيار إحدى القيم ( مراكز الفئات ) بوصفها وسطاً فرضياً ثم إيجاد

انحراف كل فئة عن ذلك الوسط الفرضي ومن ثم تطبيق القانون :

الوسط الحسابي = الوسط الفرضي +  $\frac{\text{مجموع (انحراف مركز الفئة عن الوسط الفرضي في تكرارها)}}{\text{مجموع التكرارات}}$

$$\bar{X}_0 = \text{الوسط الفرضي} \quad \text{حيث} \quad \bar{X} = \bar{X}_0 + \frac{\sum f \cdot E}{\sum f}$$

$$f = \text{تكرار الفئة} , E = X - \bar{X}_0 \text{ الانحراف} \quad \sum f = \text{مجموع التكرارات} .$$

مثال 5 :

الجدول التكراري التالي يبين أعمار 100 طالب جامعي. أوجد الوسط الحسابي للأعمار بطريقة الوسط الفرضي؟

الاعمار	18	20	22	24	26	28-30	المجموع
عدد الطلاب	20	44	18	13	3	2	100

الحل :

(1) نستخرج مراكز الفئات.

(2) نختار الوسط الفرضي ( $\bar{X}_0$ ) من بين مراكز الفئات وليكن (21) الذي يقابل أكبر تكرار .

(3) نستخرج أنحراف مركز كل فئة عن الوسط الفرضي ( الانحراف = مركز الفئة - الوسط الفرضي).  $E = X - \bar{X}_0$ .

(4) نستخرج حاصل ضرب تكرار كل فئة (f) × انحراف مركزها عن الوسط الفرضي .

(5) نستخرج المجموع الكلي للتكرارات والمجموع الكلي  $\sum (f.E)$  ، نكتب المعلومات السابقة في جدول كالآتي:

الاعمار للفئات	عدد الطلاب التكرار (f)	مركز الفئة (X)	الانحراف $E = X - \bar{X}_0$	f.E
18-	20	19	19 - 21 = -2	20 × -2 = -40
20-	44	21 = $\bar{X}_0$	21 - 21 = 0	44 × 0 = 0
22-	18	23	23 - 21 = 2	18 × 2 = 36
24-	13	25	25 - 21 = 4	13 × 4 = 52
26-	3	27	27 - 21 = 6	3 × 6 = 18
28- 30	2	29	29 - 21 = 8	2 × 8 = 16
المجموع	100			82

$$\bar{X} = \bar{X}_0 + \frac{\sum f.E}{\sum f}$$

$$\bar{X} = 21 + \frac{82}{100} = 21 + 0.82$$

$$\bar{X} = 21.82 \quad \text{الوسط الحسابي للأعمار}$$

## مزايا الوسط الحسابي وعيوبه :

### المزايا :

- (1) يتميز بعملياته الحسابية البسيطة .
- (2) تدخل جميع القيم في حسابه .

### العيوب :

- (1) يتأثر بالقيم الشاذة او المتطرفة الكبيرة جداً او الصغيرة جداً .
- (2) لا يمكن حسابه حساباً بيانياً .

## [ 3 - 7 ] الوسيط Median :

### تعريف (7-2)

يعرف الوسيط لمجموعة من القيم بأنه القيمة التي تتوسط المجموعة بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً وبالتالي فإن عدد القيم الأصغر منه يكون مساوياً للقيم الأكبر منه .

### طريقة حساب الوسيط :

#### ١) البيانات غير المبوبة :

نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً ثم نأخذ القيمة التي تقع في المنتصف لتكون هي الوسيط. هذا يفرض أن عدد القيم فردي .  
أما إذا كان عدد القيم زوجياً فنأخذ القيمتين اللتين في المنتصف ويكون الوسيط هو مجموع القيمتين مقسوماً على اثنين.

مثال ( 6 ) :

احسب الوسيط لأوزان بعض الطلاب والتي هي : 52 كغم، 58 كغم، 50 كغم، 63 كغم، 55 كغم.

الحل :

نرتب القيم تصاعدياً: 50، 52، 55، 58، 63 نلاحظ أن القيمة التي في المنتصف هي الثالثة في

الترتيب

∴ الوسيط = 55

مثال ( 7 ) :

احسب الوسيط للأوزان التالية لبعض الطلاب: 52 كغم، 58 كغم، 50 كغم، 63 كغم، 57 كغم، 55 كغم.

الحل :

نرتب القيم تصاعدياً: 50، 52، 55، 57، 58، 63

نلاحظ وجود قيمتين في المنتصف ويكون

$$\text{ترتيب الاول} = \frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (الثالث)}$$

$$\text{ترتيب الثاني} = 1 + \frac{n}{2} = 1 + 3 = 4 \text{ (الرابع)}$$

$$\therefore \text{الوسيط} = \frac{\text{الثالث} + \text{الرابع}}{2} = \frac{57 + 55}{2} = 56$$

## (2) في البيانات المبوبة :

يمكن حساب الوسيط في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات: وتكون خطوات الحل كما يأتي :

(1) نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد من الجدول التكراري.

$$(2) \text{ حساب ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجموعة التكرار}}{2}$$

(3) تحديد الفئة التي تحتوي على الوسيط من الجدول التكراري المتجمع الصاعد وتسمى

الفئة الوسيطة وهي الفئة التي تقابل أول تكرار أكبر أو يساوي ترتيب الوسيط .

الوسيط = الحد الأدنى للفئة الوسيطة +  $\frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطة}}{\text{تكرار الفئة الوسيطة}} \times \text{طول الفئة}$

$$ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - f_b}{f_m} \cdot W$$

حيث الوسيط = ME ،  $f_b$  التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطة ،  $f_m$  تكرار الفئة الوسيطة ، W : طول الفئة ، L: الحد الأدنى للفئة

الوسيطية.

فئات الوزن	التكرار عدد الاشخاص	التكرار المتجمع الصاعد
30-	9	9
40-	15	24
50-	22	46
60-	25	71
70-	18	89
80 - 90	11	100
المجموع	100	

مثال ( 8 ) :

جد وسيط الوزن من  
الجدول التالي :

الحل :

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{100}{2} = 50$$

∴ الفئة الوسيطة = ( 60 - 70 )

$$ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - f_b}{f_m} \cdot W$$

$$ME = 60 + \frac{50 - 46}{25} \times 10$$

$$= 60 + \frac{8}{5} \Rightarrow ME = 60 + 1.6 = 61.6$$



## مزايا الوسيط وعيوبه :

### المزايا :

- (1) لا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة
- (2) يمكن حسابه حساباً بيانياً.

### العيوب :

- (1) لا تدخل جميع القيم في حسابه.
- (2) في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات يكون حسابه بالطرق التقريبية .

## [7-4] المنوال Mode :

### تعريف (3 - 7)

يُعرّف المنوال لمجموعة من القيم بأنه القيمة الأكثر تكراراً أو التي تقابل أكبر التكرارات. ويرمز له MO

### طريقة حساب المنوال :

### 1) البيانات غير البوابة :

مثال (9) :

ما هي القيمة المنوالية لمجموعة الأعداد الآتية :

أ) 4، 2، 4، 7، 8، 3، 4، 9، 7، 4

ب) 18، 10، 5، 6، 8، 1، 5، 6

ج) 12، 11، 10، 7، 3، 4، 5، 8

الحل :

المنوال = 4 لأنها تكررت أكثر من غيرها .

المنوال = 5، 6 لأنهما تكررا أكثر من غيرهما.

المنوال = لا يوجد

## 2 ( البيانات المبوبة :

( أ ) طريقة الفروق (طريقة بيرسون) :

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية +  $\frac{d_1}{d_1 + d_2} \times$  طول الفئة المنوالية  
 حيث  $d_1 =$  تكرار الفئة المنوالية - تكرار الفئة التي قبلها.  
 $d_2 =$  تكرار الفئة المنوالية - تكرار الفئة التي بعدها.

وإن التكرار المنوالي هو أكبر تكرار في الجدول التكراري. والفئة المنوالية التي تقابل أكبر تكرار.

مثال ( 10 ) :

احسب المنوال من الجدول التالي :

الحل :

التكرار	فئات
9	30-
15	40-
22	50-
25	60-
18	70-
11	80-90

التكرار السابق →  
 التكرار المنوالي →  
 التكرار اللاحق →

$$d_1 = 25 - 22 = 3$$

$$d_2 = 25 - 18 = 7$$

طول الفئة المنوالية =  $70 - 60 = 10$

$$\begin{aligned} \text{المنوال} &= \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times \text{طول الفئة} \\ \text{المنوال} &= 60 + \frac{3}{3 + 7} \times 10 \\ \text{المنوال} &= 60 + 3 \\ \text{المنوال} &= 63 \end{aligned}$$

( ب ) طريقة العزوم (الرافعة) :

(1) في هذه الطريقة نرسم عتلة ونجعل تكرار الفئة قبل المنوالية قوة تؤثر عند إحدى نهايتي العتلة. والتكرار اللاحق لتكرار الفئة المنوالية قوة تؤثر عند النهاية الأخرى للعتلة وطول العتلة = طول الفئة

(2) نفرض نقطة الارتكاز التي تمثل بُعد المنوال عند أحد الطرفين = x

(3) نطبق قانون العتلة ( القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها ).

(4) نستخرج قيمة x ونضيفها إلى الحد الأدنى للفئة المنوالية فنحصل على المنوال .

مثال 11 :

جد المنوال من الجدول الآتي :

الفئات	40-	50-	60-	70-	80-	90 -100
التكرار	6	38	59	37	8	2

الحل :

الفئة المنوالية = (70-60)

طول العتلة = طول الفئة = 10

∴ القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

$$(10 - x) (37) = x (38)$$

$$370 - 37x = 38x$$

$$75x = 370$$

$$x = \frac{370}{75} = 4.9 \therefore$$

$$\therefore \text{المنوال} = 4.9 + 60 = 64.9$$

طول العتلة = طول الفئة = 10

10 - x

x

الارتكاز

تكرار الفئة بعد

المنوالية = 37

تكرار الفئة قبل

المنوالية = 38

مزايا المنوال وعيوبه :

المزايا :

(1) بسيط في طريقة حسابه

(2) لايتأثر بالقيم الشاذة والمتطرفة.

العيوب :

(1) في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات يكون حسابه بالطرق التقريبية

(2) لايمكن ايجاده في حاله عدم وجود قيم متكررة اكثر من غيرها.

(3) قد يوجد اكثر من منوال في حالة تكرار القيم بنفس الدرجة

## تمرينات ( 1 - 7 )

س1 / عرف الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

س2 / البيانات التالية تمثل أعمار مجموعة من الطلاب . 15، 17، 16، 18، 16، 18، 15، 17، 18، 17

19 جد: أ) الوسط الحسابي ، ب) الوسيط ، ج) المنوال

س3 / إذا كان الوسط الحسابي للدخل الشهري لخمسة أشخاص (40000) دينار. فما مجموع دخولهم ؟

س4 / الجدول التالي يبين مجموع درجات الحرارة في إحدى المدن خلال 90 يوماً في فصل الصيف في أحد الأعوام :

المجموع	44-48	40-	36-	32-	28-	24-	20-	فئات درجات الحرارة
90	7	9	15	23	18	10	8	عدد الايام

المطلوب : أ) الوسط الحسابي لدرجات الحرارة. ب) الوسيط. ج) المنوال.

س5 / الجدول الآتي يبين رواتب 60 معلماً في مدرسة والمطلوب إيجاد الوسيط لهذه الرواتب:

الراتب بالف دينار	150-	160-	170-	180-	190-	200-210
عدد المعلمين	5	10	15	20	7	3

س6 / الجدول الآتي يبين الأرباح اليومية لمجموع من المحلات في إحدى المدن جد الوسط

الحسابي (معدل الربح اليومي) لهذه الارباح :

الربح اليومي بالف دينار	4-	8-	12-	16-	20-	24-28
عدد المحلات	8	10	15	20	12	6

## [7-5] مقاييس التشتت : Measures of Variation

إن لكل مجموعة من الأعداد وسطاً حسابياً، وإن أعداد هذه المجموعة ربما تكون متجمعة بالقرب منه أو مبتعدة عنه. فإذا كانت هذه الأعداد متجمعة بالقرب من وسطها الحسابي فإن مقدار تشتتها ضئيل، وإذا كانت هذه الأعداد مبتعدة عن وسطها الحسابي فإن تشتتها كبير. مثلاً: أن الوسط الحسابي للأعداد 30، 40، 50، 60، 70 هو 50 والوسط الحسابي للأعداد: 10، 20، 90، 100، 30 هو 50 عند تأمل المجموعة الأولى نشاهد أن تشتتها عن الوسط الحسابي ضئيل بينما تشتت أعداد المجموعة الثانية عن الوسط الحسابي كبير .

### مقاييس التشتت :

إن مقاييس التشتت التي سوف ندرسها هي :

١. المدى Range

٢. الانحراف المعياري Standard Deviation

### [7-5-1] المدى: هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة للمتغير

والمدى مقياس ليس ذا أهمية لقياس التشتت لأنه يتوقف على قيمتين فقط من قيم المتغير . وهما أقل وأكبر قيمة للمتغير، ولذا فهو يتأثر تأثيراً بالغاً بذبذبات العينة وإن أي تغير يحدث في أي من هاتين القيمتين يؤثر بوضوح في قيمة المدى .

(أ) البيانات غير المبوبة :

مثال 12 ) :

ما هو المدى في مجموعة القيم التالية: 12، 35، 68، 24، 98

الحل :

$$R = 98 - 12 = 86 \text{ المدى}$$

مثال 13 :

ما هو المدى في التوزيع التكراري التالي :

الفئات	5-	15-	25-	35-	45-55
التكرار	3	8	15	14	7

الحل :

$$R = 55 - 5$$

المدى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة - الحد الأدنى للفئة الأولى

$$\therefore R = 50$$

### [7-5-2] الانحراف المعياري :

يعد الانحراف المعياري من أكثر مقاييس التشتت إستخداماً. فإذا كانت لدينا  $n$  من المفردات  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ووسطها الحسابي  $\bar{x}$ . فإن هذه المفردات تكون متقاربة من بعضها إذا كانت قريبة من وسطها الحسابي  $\bar{x}$  أي إذا كانت إنحرافاتهما عن  $\bar{x}$  صغيرة،  $\dots, \bar{x}_1, \bar{x}_2$ ، وبالتالي فإن إنحرافات المفردات عن وسطها الحسابي يمكن استخدامها لقياس التشتت. ويمكن أن يتم ذلك بأخذ متوسط هذه الانحرافات.

#### تعريف (7-4)

**الانحراف المعياري** : هو القيمة الموجبة للجذر التربيعي لمتوسط مربعات إنحرافات قيم مفردات التوزيع عن وسطها الحسابي ويرمز له بالرمز (S).

حساب الانحراف المعياري لقيم غير مبوبة :

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

x	x <sup>2</sup>
1	1
3	9
5	25
7	49
9	81
25	165

المجموع

مثال (14) :

احسب الانحراف المعياري للقيم الآتية: 1، 3، 5، 7، 9

الحل :

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{25}{5} = 5$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{165}{5} - 25} = \sqrt{33 - 25}$$

$$\dots \text{ الانحراف المعياري } \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

مثال (15) :

**ملاحظة :**  
عند طرح كمية ثابتة من جميع القيم، لا تؤثر على قيمة الانحراف المعياري والمثال (15) يوضح ذلك :

إطرح 1 من الأعداد 1، 3، 5، 7، 9 ثم احسب الانحراف المعياري للقيم الجديدة . قارن النتيجة مع مثال (14) ماذا تلاحظ ؟

الحل :

x	x <sup>2</sup>
0	0
2	4
4	16
6	36
8	64
20	120

المجموع

الأعداد 1، 3، 5، 7، 9

أطرح 1 : 0، 2، 4، 6، 8

$$\bar{X} = \frac{8 + 6 + 4 + 2 + 0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{120}{5} - 16} = \sqrt{24 - 16}$$

$$\dots \text{ الانحراف المعياري } \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

نلاحظ نفس الانحراف المعياري للأعداد قبل طرح (1) كما في مثال (14)

### تعريف (4 - 7)

**الدرجة المعيارية** : تعرف الدرجة المعيارية بأنها خارج قسمة إنحراف قيمة ذلك المتغير عن الوسط الحسابي لتلك المجموعة على الانحراف المعياري لها.

$$SD = \frac{X - \bar{X}}{S} \quad \text{أي أنه الدرجة المعيارية:}$$

### [ 7 - 5 - 3 ] الارتباط : Correlation

### تعريف (5 - 7)

**الارتباط** : هو العلاقة الرياضية بين متغيرين، بحيث إذا تغير احدهما باتجاه معين يميل الآخر إلى التغيير في اتجاه معين أيضاً، فإذا كان التغير باتجاه واحد سمي الارتباط طردياً، أما إذا كان التغير باتجاهين متعاكسين سمي الارتباط عكسياً .

**معامل الارتباط Correlation Coefficient ( r ) بين المتغيرين x ، y :**

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\bar{y}}{S_x S_y}$$

نحسب معامل الارتباط: r حيث

حيث  $\bar{x}$  = الوسط الحسابي للمتغير x

$\bar{y}$  = الوسط الحسابي للمتغير y

$S_x$  = الانحراف المعياري للمتغير x

$S_y$  = الانحراف المعياري للمتغير y

**بعض خصائص (r) :**

- (1) r موجبة في حالة الارتباط الطردي (الموجب) .
- (2) r=1 في حالة الارتباط الطردي التام.
- (3) r سالبة في حالة الارتباط العكسي (السالب) .
- (4) r = -1 في حالة الارتباط العكسي التام .
- (5) r = 0 في حالة إنعدام الارتباط.

يلاحظ مما سبق أن قيمة معامل الارتباط تنتمي إلى [ -1 , 1 ] وكلما إقتربت قيمة r من +1 أو -1 كان هذا دليلاً على قوة الارتباط بين المتغيرين وكلما إقتربت قيمته من الصفر كان هذا دليلاً على إنعدام الارتباط .



مثال 16 :

جد معامل الارتباط بين المتغيرين  $x, y$  ثم جد الدرجة المعيارية للعدد  $x=5$  إذا كان :

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

ثم بين نوعه؟

x	y	$x^2$	$y^2$	$x y$
1	2	1	4	2
2	4	4	16	8
3	6	9	36	18
4	8	16	64	32
5	10	25	100	50
15	30	55	220	110

المجموع

الحل :

$$\bar{X} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{Y} = \frac{30}{5} = 6$$

$$S_x = \sqrt{\frac{55}{5} - 9} = \sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{220}{5} - 36} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{\sum x y}{n} - \bar{x} \bar{y}}{S_x S_y} = \frac{\frac{110}{5} - (3)(6)}{(\sqrt{2})(2\sqrt{2})}$$

$$r = \frac{22 - 18}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

∴ نوع الارتباط طردي تام

$$SD = \frac{x - \bar{x}}{S_x}$$

$$\therefore SD = \frac{5 - 3}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

مثال ( 17 ) :

جد معامل الارتباط بين المتغيرين  $x$  ،  $y$  ثم بين نوعه إذا كان :

x	-5	-2	1	4	7
y	9	6	3	0	-3

الحل :

x	y	$x^2$	$y^2$	xy
-5	9	25	81	-45
-2	6	4	36	-12
1	3	1	9	3
4	0	16	0	0
7	-3	49	9	-21
5	15	95	135	-75

المجموع

$$\bar{X} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\bar{Y} = \frac{15}{5} = 3$$

$$S_x = \sqrt{\frac{95}{5} - (1)^2} = \sqrt{19 - 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{135}{5} - (3)^2} = \sqrt{27 - 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\bar{y}}{S_x S_y} = \frac{\frac{-75}{5} - (1)(3)}{3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}$$

$$r = \text{نوع الارتباط عكسي تام} = \frac{-15 - 3}{(9)(2)} = \frac{-18}{(18)} = -1$$

## تمريبات ( 2 - 7 )

س 1 /

أ) أوجد المدى للقيم التالية: 12، 9، 7، 8، 0، 3  
ب) أوجد المدى من الجدول التالي :

فئات العمر	20 -	22 -	24 -	26 -	28 -	30 - 32
التكرار	5	10	20	10	5	2

س 2 /

عرف الانحراف المعياري ثم احسب الانحراف المعياري للقيم التالية : 2، 4، 6، 8، 10

س 3 /

أوجد الانحراف المعياري للأعداد : 3، 6، 2، 1، 7، 5 ثم أضف 5 الى كل عدد منها وأثبت أن هذه الإضافة لا تؤثر على قيمة الإنحراف المعياري ولكنها تؤثر على قيمة الوسط الحسابي .

س 4 /

جد معامل الارتباط بين المتغيرين  $x$ ،  $y$  ثم بين نوعه ؟

$x$	1	2	3
$y$	2	4	6

س 5 /

في السؤال السابق لو ضربت قيم  $x$  في 4 تحصل على جدول آخر ،جد معامل الارتباط للقيم الجديدة وقارن النتيجة بالسؤال السابق .

$x$	4	8	12
$y$	2	4	6

س 6 /

جد معامل الارتباط بين المتغيرين  $x$ ،  $y$  ثم بين نوعه؟

$x$	13-	9-	5-	1-	3
$y$	+3	+1	-1	-3	-5

3	المقدمة
4	الفصل الأول : المنطق الرياضي
21	الفصل الثاني : المعادلات والمتباينات
40	الفصل الثالث: الاسس والجدور
58	الفصل الرابع: حساب المثلثات
89	الفصل الخامس: المتجهات
109	الفصل السادس: الهندسة الاحداثية
135	الفصل السابع: الاحصاء
156	المحتويات