



الجزء الأول

سلسلة كتب الرياضيات للمرحلة المتوسطة

الرياضيات

للف الثالث المتوسط

المؤلفون

د. طارق شعبان رجب	د. أمير عبدالمجيد جاسم
د. منير عبد الخالق عزيز	د. سمير قاسم حسن
زينة عبدالأمير حسين	حسين صادق كاظم

بُنِيَتْ وَصُمِّمَتْ (سلسلةُ كُتُبِ الرِّياضيَّاتِ للمرحلةِ المتوسطةِ) على أيدي فريقٍ من المتخصِّصين في وزارةِ التَّربيةِ /المديريةِ العامَّةِ للمناهجِ وبِمشاركةٍ متخصِّصينَ من أساتذةِ الجامعاتِ في وزارةِ التَّعليمِ العالِيِ والبحثِ العلمي على وفق المعاييرِ العالميةِ لِتُحَقِّقَ أهدافَ بناءِ المنهجِ الحديثِ المتمثِّلَةِ في جعلِ الطُّلابِ:

- مُتعلِّمينَ ناجحينَ مدى الحياة.
- أفراداً واثقينَ بأنفسِهِم.
- مواطنينَ عراقيينَ يشعُرونَ بالفخرِ.

المشرفُ الفنيُّ على الطَّبع
تيسير عبد الإله إبراهيم
مُصمِّمُ الكتاب
تيسير عبد الإله إبراهيم

المشرفُ العلميُّ على الطَّبع
م.م. زينة عبد الأمير حسين

الغلافُ والرَّسومُ الهندسيَّةُ
سارة خليل إبراهيم
ياسر منذر محمد سعيد

الموقع والصفحة الرسمية للمديرية العامة للمناهج

www.manahj.edu.iq
manahjb@yahoo.com
Info@manahj.edu.iq



manahjb
manahj



استناداً إلى القانون يوزَّع مجاناً ويمنع بيعه وتداوله في الأسواق

تُعَدُّ مادةُ الرياضياتِ مِنَ الموادِ الدراسيةِ الأساسيةِ التي تُساعدُ الطالبَ على اكتسابِ الكفاياتِ التعليميةِ اللازمةِ له، لتنميةِ قدراته على التفكيرِ وحلِّ المشكلاتِ، ويساعدهُ على التعاملِ مع المواقفِ الحياتيةِ المختلفةِ.

وَمِنْ مُنْطَلَقِ الاهتمامِ الذي تُوليه وزارةُ التربيةِ متمثلةً بالمديريةِ العامةِ للمناهجِ لتطويرِ المناهجِ بصورةٍ عامةٍ ولاسيما مناهجِ الرياضياتِ لكي تواكبَ التطوراتِ العلميةَ والتكنولوجيةَ في مجالاتِ الحياةِ المختلفةِ، فَقَدْ وُضِعَتْ خطةٌ لتأليفِ سلسلةِ كُتُبِ الرياضياتِ للمراحلِ الدراسيةِ الثلاثِ، وأنجزتْ منها كتبُ المرحلةِ الابتدائيةِ وبَدَأَ العملُ على استكمالِ السلسلةِ بتأليفِ كتبِ المرحلةِ المتوسطةِ.

إنَّ سلسلةَ كتبِ الرياضياتِ العراقيةِ الجديدةِ ومن ضمنِ الإطارِ العامِ للمناهجِ تُعزِّزُ القيمَ الأساسيةَ التي تتمثلُ بالالتزامِ بالهويةِ العراقيةِ والتسامحِ واحترامِ الرأيِ والرأيِ الآخرِ والعدالةِ الاجتماعيةِ، وتوفيرِ فرصٍ متكافئةٍ للتميُّزِ والإبداعِ، كما تعملُ على تعزيزِ كفاياتِ التفكيرِ والتعلُّمِ والكفاياتِ الشخصيةِ والاجتماعيةِ وكفاياتِ المواطنةِ والعملِ.

بُنِيَتْ سلسلةُ كتبِ الرياضياتِ العراقيةِ على محورِيَّةِ الطالبِ في عمليَّتي التعلُّمِ والتعلُّمِ وَعدَهُ المحورَ الرئيسَ في العمليةِ التربويةِ على وفقِ المعاييرِ العالميةِ.

تميزتْ سلسلةُ كتبِ الرياضياتِ العراقيةِ للمرحلةِ المتوسطةِ في تنظيمِ الدروسِ على ستِ فقراتٍ: تَعَلَّمَ ، تَأَكَّدْ مِنْ فَهْمِكَ ، تَدَرَّبْ وَحَلِّ التمريناتِ ، تَدَرَّبْ وَحَلِّ مسائلَ حياتيةً ، فَكَّرْ ، أَكْتُبْ . يأتي كتابُ الرياضياتِ للصفِ الثالثِ المتوسطِ مشتملاً على أربعةِ محاورٍ أساسيةٍ: محورُ الأعدادِ والعملياتِ ، ومحورُ الجبرِ ، ومحورُ الهندسةِ والقياسِ ، ومحورُ الإحصاءِ والاحتمالاتِ من ضمنِ الأوزانِ النسبيةِ لكلِ محورٍ، وتضمَّنَ الكتابُ جزأين: الجزء الأولُ يحتوي على ثلاثةِ فصولٍ لكلِ فصلٍ تمريناته، أما الجزء الثانيُ يحتوي على ثلاثةِ فصولٍ ولكلِّ فصلٍ تمريناته.

تتميَّزُ هذهِ الكتبُ بأنها تعرضُ المادةَ بأساليبَ حديثةٍ، تتوفرُ فيها عناصرُ الجذبِ والتشويقِ، التي تُساعدُ الطالبَ على التفاعلِ معها، عن طريقِ ما تُقدِّمه من تدريباتٍ وتمريناتٍ ومسائلَ حياتيةٍ، إضافةً إلى ذلكِ وُضِعَتْ تمريناتُ الفصولِ في نهايةِ الكتابِ وهي تختلفُ عن التدريباتِ والتمريناتِ في الدروسِ وذلكَ لكونها موضوعيةً فالإجابة عنها تكون عن طريقِ اختيارٍ من متعدِّدٍ وهذا بدوره يهيئُ الطالبَ للمشاركةِ في المسابقاتِ الدوليةِ.

يمثِّلُ هذا الكتابُ امتداداً لسلسلةِ كُتُبِ الرياضياتِ المطوَّرةِ للمرحلةِ الابتدائيةِ ودعامةً من دعائمِ المنهجِ المطوَّرِ في الرياضياتِ إلى جانبِ دليلِ المدرِّسِ، وعليه نأملُ أن يُسَهِّمَ تنفيذُها في اكتسابِ الطَّلابِ المهاراتِ العلميةِ والعمليةِ وتنميةِ ميولهم لدراسةِ الرياضياتِ.

اللَّهُمَّ وَفَّقْنَا لخدمةِ عراقنا العزيزِ وأبنائه ...

المؤلفون

العلاقات والمتباينات في الأعداد الحقيقية Relations and Inequalities in Real Numbers

- الدرس 1-1 ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية
- الدرس 1-2 التطبيقات
- الدرس 1-3 المتتابعات
- الدرس 1-4 المتباينات المركبة
- الدرس 1-5 متباينات القيمة المطلقة
- الدرس 1-6 خطة حل المسألة (افهم المسألة)

تتحرك موجة التسونامي في البحار العميقة بسرعة فائقة، لكنها حين تصل إلى الشاطئ تزداد سرعتها تحت تأثير طاقتها الهائلة وتضرب الشاطئ بقوة مخلفة دمار شامل. ويمكن حساب سرعة التسونامي بالقانون $v = \sqrt{9.6d}$ متر في الثانية، حيث d تمثل عمق الماء بالمتر.

صنّف العدد من حيث كونه عدداً نسبياً أو غير نسبي:

1 $\sqrt{25}$

2 $\sqrt{7}$

3 $\frac{0}{\sqrt{3}}$

4 $\sqrt{\frac{16}{25}}$

5 $\sqrt{\frac{49}{5}}$

6 $\frac{30}{4}$

7 $-6\frac{3}{2}$

8 $-\sqrt{8}$

قدّر الجذور التربيعية التالية بالتقريب لأقرب عُشر، ثم مثلها على مستقيم الأعداد:

9 $\sqrt{2} \approx \dots$

10 $-\sqrt{3} \approx \dots$

11 $\sqrt{\frac{6}{25}} \approx \dots$

12 $\sqrt{\frac{81}{49}} \approx \dots$

قارن بين الأعداد الحقيقية مستعملاً الرموز ($=$, $>$, $<$):

13 $\sqrt{5} \boxed{} 2\frac{1}{3}$

14 $1.25 \boxed{} \sqrt{2.25}$

15 $\sqrt{\frac{0}{3}} \boxed{} \frac{0}{6}$

16 $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \boxed{} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$

17 رتّب الأعداد من الأصغر إلى الأكبر: $\sqrt{7}$, 2.25 , $\sqrt{5}$

18 رتّب الأعداد من الأكبر إلى الأصغر: -3.33 , $-\frac{7}{3}$, $-3\frac{1}{5}$

حلّ المتباينات التالية في R باستعمال خواص المتباينات على الأعداد الحقيقية:

19 $3x + \frac{2}{5} \geq 4x - \frac{3}{5}$

20 $\frac{3}{7} > z - \frac{9}{14}$

21 $\frac{3y}{8} \geq \frac{2}{7}$

22 $\frac{-4m}{11} < \frac{9}{22}$

23 $6(z - 3) > 5(z + 1)$

24 $4\left(\frac{1}{2}v + \frac{3}{8}\right) > 0$

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

25 $\sqrt{2}(1 - \sqrt{18}) = \dots$

26 $3\sqrt{12} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \dots$

27 $\frac{\sqrt{7} - 8\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} = \dots$

28 $\frac{6\sqrt{44}}{\sqrt{5}} \div \frac{18\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$



تعلم

يُعد زلزال تسونامي الذي حدث في اليابان عام 2011 من أقوى الزلازل التي حدثت على مرّ العصور. وتحسب سرعة التسونامي بالقانون $v = \sqrt{9.6d}$ متر بالثانية، حيث d تمثل عمق المياه. ما سرعة التسونامي التقريبية إذا كان عمق المياه 1000 متر؟

فكرة الدرس

- تبسيط الجمل العددية التي تحتوي على أعداد حقيقية باستعمال ترتيب العمليات.
- المفردات
- العدد الحقيقي
- تنسيب (تجذير) المقام.
- المرافق

11-1-1 استعمال ترتيب العمليات لتبسيط جمل عددية

Using ordering operations to simplify the numerical sentences

تعرفت سابقاً إلى الأعداد الطبيعية والكلية والصحيحة والنسبية والحقيقية، ويمكن إدراجها بالترتيب الآتي: $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$ ، وكذلك تعلمت كيفية تبسيط جمل عددية باستعمال ترتيب العمليات على هذه الأعداد، وسوف تزيد مهارتك في تبسيط الجمل العددية التي تحتوي على أعداد حقيقية مختلفة فيها جذور حقيقية وجذور مربعات كاملة وكذلك كسور تحتوي على جذور بتطبيق الخواص عليها مع استعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية وكذلك استعمال تنسيب المقام لتبسيط العبارات وذلك من خلال ضرب مقام الكسر بالعامل المنسب (المرافق) (العدد $2 - \sqrt{3}$ هو العامل المنسب (المرافق) للعدد $2 + \sqrt{3}$ لأن حاصل ضربهما عدد نسبي).

مثال (1)

جد سرعة التسونامي التقريبية إذا كان عمق المياه 1000 متر.

$$v = \sqrt{9.6d}$$

قانون حساب سرعة التسونامي حيث d تمثل عمق المياه

$$= \sqrt{9.6 \times 1000} = \sqrt{9600} \approx 98 \text{ m/sec}$$

سرعة التسونامي التقريبية

مثال (2)

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

باستعمال التوزيع

$$i) (\sqrt{12} - \sqrt{18})(\sqrt{12} + \sqrt{18}) = (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$$

$$= 2\sqrt{3}(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) - 3\sqrt{2}(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) = 12 + 6\sqrt{6} - 6\sqrt{6} - 18 = -6$$

$$ii) (\sqrt[3]{\frac{8}{27}} - \sqrt{\frac{2}{3}}) \div (\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}) = (\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}}) \div (\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}) = \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{-3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} = -1$$

مثال (3)

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية واكتب الناتج لأقرب عُشر:

$$i) \sqrt{12}(\sqrt{3} - \sqrt{8}) - 6 = 2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) - 6 = 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} - 6$$

$$= 6 - 4\sqrt{3 \times 2} - 6 = -4\sqrt{6} \approx -4 \times 2.4 = -9.6$$

$$ii) (-27)^{\frac{1}{3}} (\frac{1}{9}\sqrt{7} - \frac{1}{9}\sqrt{28}) = \sqrt[3]{-27} (\frac{1}{9}\sqrt{7} - \frac{2}{9}\sqrt{7}) = -3 (\frac{1}{9}\sqrt{7} - \frac{2}{9}\sqrt{7})$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{7} + \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{1}{3}\sqrt{7} \approx 0.9$$

ملاحظة: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

مثال (4) بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

$$i) \frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times 1 = \frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(7-\sqrt{5})}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5} - \sqrt{5}\sqrt{5}}{5} = \frac{7\sqrt{5} - 5}{5}$$

$$ii) \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}} \times \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{7}(2\sqrt{3}+\sqrt{7})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{7})(2\sqrt{3}+\sqrt{7})}$$

$$= \frac{6\sqrt{7} + 7\sqrt{3}}{12 - 7} = \frac{6\sqrt{7} + 7\sqrt{3}}{5}$$

الضرب بالمرافق

المقام فرق بين مربعين

[1-1-2] استعمال الحاسبة والتقريب لتبسيط جمل عددية

Using calculator and approximation to simplify the numerical sentences

تعلمت سابقاً كيفية تبسيط جمل عددية تحتوي على قوى (أسس) سالبة صحيحة للعدد وصورة علمية للعدد باستعمال الحاسبة، والآن سوف تزيد مهارتك بتبسيط الجمل العددية التي تحتوي على أعداد مرفوعة إلى قوى (أسس) نسبية إضافة إلى الأعداد الصحيحة مستعملاً الحاسبة لكتابة الناتج مقرباً.

مثال (5) احسب الأسس لكل مما يلي واكتب الناتج مقرباً إلى مرتبتين عشريتين إذا لم يكن عدداً صحيحاً:

$$i) 9^{-\frac{3}{2}} = (3^2)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \approx 0.04$$

$$ii) (\sqrt{7})^2 = (7^{\frac{1}{2}})^2 = 7$$

$$iii) 2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{10+2-9}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.41$$

$$iv) 5^2 \div 5^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{4}{2}-\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \approx 2.24$$

استعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقرباً إلى مرتبتين عشريتين مستعملاً الحاسبة لكل مما يأتي:

$$v) (\frac{1}{2})^2 + 3^{-2} - 2^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \sqrt{2^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \sqrt{8} \approx 0.25 + 0.11 - 2.83 = -2.47$$

$$iv) 8^{\frac{1}{3}} - (-8)^0 + 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{8} - 1 + 3^{\frac{5}{2}} = \sqrt[3]{8} - 1 + \sqrt{3^5} \approx 2 - 1 + 9 \times 1.73 = 16.57$$

مثال (6) استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقرباً لأقرب مرتبتين عشريتين:

$$i) 7.6 \times 10^{-4} - 0.4135 \times 10^{-3} = 7.6 \times 10^{-4} - 4.135 \times 10^{-4} = 3.465 \times 10^{-4} \approx 3.47 \times 10^{-4}$$

$$ii) 0.052 \times 10^4 + 7.13 \times 10^2 = 5.2 \times 10^2 + 7.13 \times 10^2 = 12.33 \times 10^2 \approx 1.23 \times 10^3$$

$$iii) (7.83 \times 10^{-5})^2 = (7.83 \times 10^{-5})(7.83 \times 10^{-5}) = 61.3089 \times 10^{-10} \approx 6.13 \times 10^{-9}$$

$$iv) 4.86 \times 10^2 \div 0.55 \times 10^5 = (4.86 \div 0.55) \times 10^2 \times 10^{-5} \approx 8.84 \times 10^{-3}$$

بسّط الجمل العددية الآتية:

1 $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = \dots\dots$

2 $(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 = \dots\dots$

الأسئلة (1 - 4)

3 $(\sqrt{125} - \sqrt{20})(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}) = \dots\dots$

4 $\frac{4\sqrt{12}}{5\sqrt[3]{-27}} \div \frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{8}} = \dots\dots$

مشابهة للمثال (2)

بسّط الجمل العددية التالية واكتب الناتج لأقرب عُشر:

5 $\sqrt{7}(\sqrt{28} - \sqrt{2}) - 5 \approx \dots\dots$

6 $(-125)^{\frac{1}{3}}(\frac{1}{10}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\sqrt{12}) \approx \dots\dots$

الأسئلة (5 - 6)

مشابهة للمثال (3)

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد:

7 $\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \dots\dots$

8 $\frac{1-\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \dots\dots$

9 $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \dots\dots$

الأسئلة (7 - 9)

مشابهة للمثال (4)

استعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقرباً إلى مرتبتين عشريتين مستعملاً الحاسبة لكل مما يأتي:

10 $(\frac{1}{3})^2 + 3^{-3} - 3^{\frac{3}{2}} \approx \dots\dots$

11 $27^{\frac{1}{3}} - (-9)^0 + 3^2 \times 5^{\frac{1}{2}} \approx \dots\dots$

الأسئلة (10 - 11)

مشابهة للمثال (5)

استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقرباً لأقرب مرتبتين عشريتين:

12 $6.43 \times 10^{-5} - 0.25 \times 10^{-3} \approx \dots\dots$

13 $(9.23 \times 10^{-3})^2 \approx \dots\dots$

الأسئلة (12 - 13)

مشابهة للمثال (6)

تدرب وحلّ التمرينات

بسّط الجمل العددية الآتية:

14 $(\sqrt{18} - \sqrt{50})(\frac{-27}{64})^{\frac{1}{3}} = \dots\dots$

15 $\frac{\sqrt{12}}{3\sqrt[3]{125}} \div \frac{5\sqrt[3]{8}}{\sqrt{25}} = \dots\dots$

بسّط الجملة العددية التالية واكتب الناتج لأقرب عُشر:

16 $7\sqrt{\frac{2}{49}} - 3\sqrt{\frac{8}{81}} + \sqrt{\frac{18}{36}} \approx \dots\dots$

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد:

17 $\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}} = \dots\dots$

18 $\frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{\sqrt{99}} - \frac{\sqrt{60}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}} = \dots\dots$



19 **الأقمار الاصطناعية:** يستعمل القمر الصناعي بصفة أساسية في الاتصالات مثل إشارات التلفاز والمكالمات الهاتفية في جميع أنحاء العالم والتنبؤ بالطقس وتعقب الأعاصير، إذ تدور هذه الأقمار بسرعات محددة في مدارات خاصة بها حول الأرض، وتحسب سرعة القمر المدارية بالعلاقة التالية: $v = \sqrt{\frac{4 \times 10^{14}}{r}}$ m/sec ، إذ r نصف قطر المدار (بُعد القمر عن مركز الأرض). ما سرعة القمر إذا كان نصف قطر المدار 300km ؟



20 **مكافحة الحرائق:** تحسب سرعة تدفق الماء الذي يضخ من سيارات الحريق بالقانون $v = \sqrt{2hg}$ foot/sec ، إذ h تمثل أقصى ارتفاع للماء و g يمثل التعجيل الأرضي (32 foot/sec²). لإطفاء الحريق في الغابات تحتاج إدارة مكافحة الحرائق في الدفاع المدني إلى مضخة لتضخ الماء إلى ارتفاع 80 foot. فهل تفي بحاجتها مضخة تقذف الماء بسرعة 72 foot/sec ؟

1 foot = 30 cm
وحدة قياس بالنظام الفرنسي



21 **هندسة:** جد مساحة المثلث الذي يعلو واجهة البيت إذا كان ارتفاعه $\sqrt{18} - \sqrt{3}$ m وطول قاعدته $3\sqrt{2} + \sqrt{3}$ m.

فكر

22 **تحذ:** أثبت صحة ما يأتي:

$$\left(7^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}\right) \left(7^{\frac{2}{3}} + 7^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{2}{3}}\right) = 2$$

23 **أصح الخطأ:** كتب شاكر ناتج جمع العددين كالآتي:

$$8.4 \times 10^{-3} + 0.52 \times 10^{-2} = 1.36 \times 10^{-3}$$

حدّد خطأ شاكر وصحّحه .

24 **حسّ عددي:** هل أن العدد $\sqrt{125}$ يقع بين العددين 10.28 و 11.28 ؟

أكتب

ناتج الجمع بالتقريب لأقرب عُشر:

$$6^{\frac{3}{2}} + 5^{\frac{3}{2}} \approx \dots$$

Mappings

تعلم

فكرة الدرس

- تعرف التطبيق وأنواعه
- وكيفية تمثيله بيانياً في
- المستوي الإحداثي وتعرف
- تركيب التطبيقات.

المفردات

- العلاقة
- الزوج المرتب
- الضرب الديكارتي
- التطبيق
- المجال والمجال المقابل
- والمدى
- تركيب التطبيقات



مجموعة X تمثل بعض المناطق الأثرية في العراق {باب عشتار، أور، الحضر} $X =$ ولتكن المجموعة Y تمثل بعض المدن العراقية {بغداد، الحلة، الناصرية، الموصل، أربيل} $Y =$ العلاقة $R: X \rightarrow Y$ التي تمثل اقتران كل منطقة أثرية إلى المدينة التي تقع فيها: $R = \{(أور، (الناصرية، (أور، (الموصل، (الحضر)\}$ {بابل، باب عشتار} تسمى تطبيق مجاله X ومجاله المقابل Y .

[1-2-1] التطبيق وتمثيله في المستوي الإحداثي

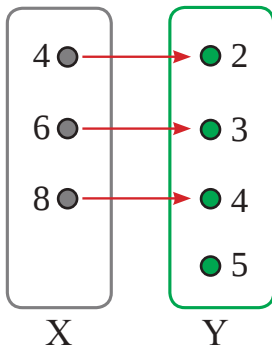
Mapping and its representation in the coordinate plane

تعرفت سابقاً إلى العلاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y وهي المجموعة الجزئية (مجموعة من الأزواج المرتبة (x,y) إذ ينتمي المسقط الأول «الأحداثي الأول» إلى المجموعة X والمسقط الثاني «الإحداثي الثاني» إلى المجموعة Y) من حاصل الضرب الديكارتي $X \times Y$ الذي يمثل مجموعة كل الأزواج المرتبة، وسوف نتعرف على التطبيق $R: X \rightarrow Y$ وكيفية تمثيله بمخطط سهمي وتمثيله بالمستوي (بيانياً) والتعرف على أنواعه.

التطبيق: لتكن R علاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y وكان لكل عنصر في X صورة واحدة في Y عندئذ تسمى العلاقة R تطبيق من X إلى Y ، $R: X \rightarrow Y$ وتسمى المجموعة X بمجال التطبيق (Domain)، والمجموعة Y بالمجال المقابل للتطبيق (Co-domain)، ويسمى كل عنصر في Y مرتبط بعنصر من X صورة لذلك العنصر، وتسمى مجموعة كل الصور في المجال المقابل بالمدى (Range)، وتسمى القاعدة التي تنقل العنصر إلى صورته بقاعدة الاقتران (قاعدة التطبيق) ويرمز لها (x,y) ، $R(x)$.

مثال (1)

إذا كانت $R: X \rightarrow Y$ تمثل تطبيقاً بقاعدة اقتران $(y = \frac{1}{2}x)$ من المجموعة $X = \{4,6,8\}$ إلى المجموعة $Y = \{2,3,4,5\}$. اكتب التطبيق على شكل مجموعة أزواج مرتبة ثم مثل التطبيق بمخطط سهمي، وحدد المجال والمدى للتطبيق.



يوضح المخطط السهمي علاقة ارتباط عناصر المجموعتين

ضمن قاعدة الاقتران $y = R(x) = \frac{1}{2}x$ أي:

$$4 \rightarrow 2, 6 \rightarrow 3, 8 \rightarrow 4$$

ولذا مجموعة التطبيق $R = \{(4,2), (6,3), (8,4)\}$

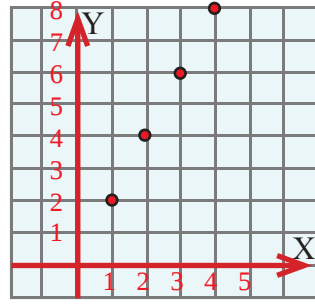
المجال: وهو مجموعة الإحداثيات الأولى من الأزواج المرتبة في R

وهو المجموعة $\{4,6,8\}$

المدى: وهو مجموعة الإحداثيات الثانية من الأزواج المرتبة في R ، وهو المجموعة $\{2,3,4\}$

ملاحظة: المدى هو مجموعة جزئية من المجال المقابل للتطبيق

نلاحظ هنا المدى $\neq$ المجال المقابل



مثال (2) الجدول التالي يمثل العلاقة بين الوزن (كغم) وسعر السمك ($f(x) = y$).

الوزن/كغم X	السعر بألوف الدنانير Y
1	2
2	4
3	6
4	8

هل تمثل العلاقة تطبيقاً؟
إذا كانت تطبيقاً فاكتب قاعدة الاقتران
وحدد المجال والمدى ومثله بالمستوي.

قاعدة الاقتران $y = 2x$

المجال $\{1, 2, 3, 4\}$, المدى $\{2, 4, 6, 8\}$

[1-2-2] أنواع التطبيقات

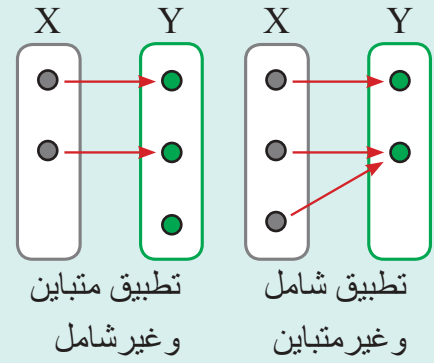
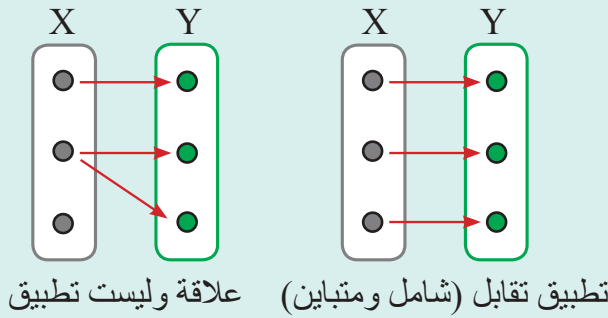
The kind of mappings

يكون التطبيق $f: X \rightarrow Y$:

(i) التطبيق شامل Surjective mapping
إذا كان المدى = المجال المقابل.

(ii) التطبيق المتباين Injective mapping
 $\forall x_1, x_2 \in X ; x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

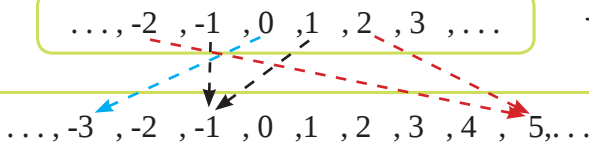
(iii) التطبيق تقابل (Bijjective mapping)
إذا كان التطبيق شامل ومتباين في آن واحد.



مثال (3) إذا كانت $f: Z \rightarrow Z$ حيث $f(x) = 2x^2 - 3$ ، بين نوع التطبيق حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة.

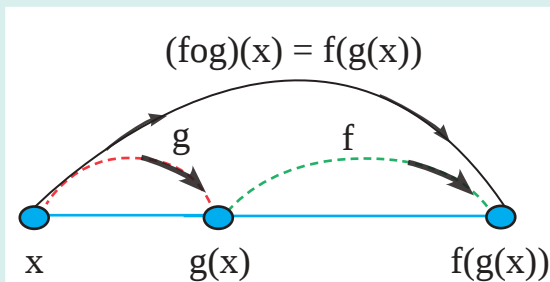
$$f(x) = 2x^2 - 3, f(-2) = 5, f(-1) = -1, f(0) = -3, f(1) = -1, f(2) = 5$$

أولاً: التطبيق ليس شاملاً لأن المدى لا يساوي المجال المقابل.
ثانياً: ليس متبايناً لأن $f(-1) = f(1) = -1$ بينما $-1 \neq 1$.



[1-2-3] تركيب التطبيقات

The composition of mappings



ندرس طريقة لإيجاد تطبيق جديد من تطبيقين معلومين إذ هما $f(x)$ و $g(x)$ وهي:

(i) التطبيق $(fog)(x) = f(g(x))$ ويُقرأ f تركيب g (بعد f)
وهو ناتج إيجاد $g(x)$ أولاً ثم إيجاد صورته في التطبيق f .

(ii) التطبيق $(gof)(x) = g(f(x))$ ويُقرأ g تركيب f
وهو ناتج إيجاد $f(x)$ أولاً ثم إيجاد صورته في التطبيق g .

مثال (4)

إذا كان $g: N \rightarrow N$ ، $g(x) = x^2$ ، $f: N \rightarrow N$ ، $f(x) = 2x + 1$.

جد: (i) $(fog)(3)$ ، (ii) $(gof)(3)$ ، ماذا تلاحظ؟ ، (iii) جد قيمة x إذا كان $(fog)(x) = 33$.

i) $(fog)(3)$ نجد

$$\begin{aligned}(fog)(3) &= f(g(3)) = f(3^2) \\ &= f(9) = 2 \times 9 + 1 \\ &= 19\end{aligned}$$

ii) $(gof)(3)$ نجد

$$\begin{aligned}(gof)(3) &= g(f(3)) \\ &= g(2 \times 3 + 1) \\ &= g(7) = 7^2 = 49\end{aligned}$$

لاحظ أن $(fog)(3) \neq (gof)(3)$

iii) $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$

$$2x^2 + 1 = 33 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \text{ or } x = -4 \text{ يهمل}$$

تأكد من فهمك

اكتب قاعدة اقتران للتطبيق ومثله بمخطط سهمي واكتب المجال والمدى له:

1 $f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$ 2 $g = \{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9)\}$

الأسئلة (2 - 1)
مشابهة للمثال (1)

اكتب قاعدة الاقتران للتطبيقات التالية ومثلها في المستوي الإحداثي واكتب المجال والمدى لها:

3 $f = \{(1,0), (2,0), (3,0), (4,0)\}$ 4 $g = \{(0,0), (1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$

الأسئلة (4 - 3)
مشابهة للمثال (2)

السؤال (5)
مشابهة للمثال (3)

5 إذا كان التطبيق $f: N \rightarrow N$ إذ إن $f(x) = 3x + 2$. بيّن هل أن التطبيق شامل أم لا؟

6 ليكن التطبيقان $f: Z \rightarrow Z$ حيث $f(x) = 3x + 1$ وأن $g: Z \rightarrow Z$ حيث $g(x) = 2x + 5$.

الأسئلة (7 - 6)
مشابهة للمثال (4)

جد قيمة x إذا كان $(fog)(x) = 28$.

7 إذا كانت $f: N \rightarrow N$ حيث $f(x) = 5x + 2$ وأن $g: N \rightarrow N$ إذ $g(x) = x + 3$.

اكتب التطبيق fog بكتابة الأزواج المرتبة له.

تدرب وحل التمرينات

8 إذا كان $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{4,5,6\}$ وأن $f: A \rightarrow B$ معرّف كالاتي:

$f = \{(1,4), (2,5), (3,6)\}$ ، ارسم المخطط السهمي للتطبيق ومثله بالمستوي الإحداثي.

9 إذا كان $f: A \rightarrow Z$ حيث $f(x) = x^2$ والمجموعة $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ، مثل التطبيق في المستوي

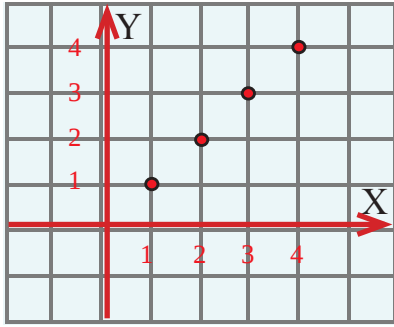
الإحداثي وبيّن هل أنه تطبيق متباين أم لا ؟

10 ليكن $f: N \rightarrow N$ إذ إن $f(x) = x^2$ ، $g: N \rightarrow N$ إذ $g(x) = x + 1$. والمطلوب إيجاد:

i) $(gof)(x)$ ، $(fog)(x)$ ، ii) $(fog)(2)$ ، $(gof)(2)$



11 **درجات الحرارة:** سجلت درجات الحرارة في أحد أيام الشتاء بالعلاقة التالية $R = \{(6, -2), (9, -3), (12, -4), (15, -5)\}$ إذ يمثل الإحداثي الأول الوقت بالساعة والإحداثي الثاني درجة الحرارة بالدرجات السيليزية. مثل العلاقة بجدول ومثلها بالمستوي الإحداثي، هل تمثل العلاقة تطبيقاً أم لا؟ مملأ إجابتك.



12 **المستوي الإحداثي:** الشكل البياني المجاور يمثل التطبيق $f: N \rightarrow N$. اكتب إحداثيات الأزواج المرتبة التي تمثلها نقاط التطبيق في البياني، اكتب قاعدة اقتران التطبيق، هل التطبيق متباين أم لا؟



13 **صحة:** العلاقة $W_r = 2\left(\frac{W_b}{3}\right)$ تمثل وزن الماء في جسم الإنسان، و W_b تمثل وزن الإنسان. وزن حسان 150kg، استعمل نظام خاص بإنقاص الوزن لمدة ثلاثة أشهر ففقد من وزنه 6kg في الشهر الأول ثم 12kg في الشهر الثاني، 12kg في الشهر الثالث. اكتب جمع الأزواج المرتبة للعلاقة بين وزن حسان ووزن الماء في جسمه، هل تمثل تطبيقاً أم لا ؟

فكر

14 **تحذ:** إذا كان $A = \{1, 2, 3\}$ وكان $f: A \rightarrow A$ و $g: A \rightarrow A$ معرفان كما يلي:

$$f = \{(1, 3), (3, 3), (2, 3)\} \quad , \quad g = \{(3, 1), (1, 2), (2, 3)\}$$

بين هل أن $f \circ g = g \circ f$ ؟

15 **أصح الخطأ:** قال ياسين إن العلاقة $f: Z \rightarrow Z$ حيث $f(x) = x^3$ لا تمثل تطبيقاً متبايناً. حدّد خطأ ياسين وصحّحه.

16 **حسّ عددي:** حدّد ما إذا كانت كل علاقة $f: X \rightarrow Y$ فيما يلي تمثل تطبيقاً أم لا؟ فسّر ذلك.

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11

أكتب

قيمة x إذا كان $f: N \rightarrow N$ يمثل تطبيقاً حيث $f(x) = 4x - 3$ ، وأن $(f \circ f)(x) = 33$.

The Sequences



تعلم

يعمل بشار في المرسم خمسة أيام في الأسبوع وينتج لوحةً فنيةً كلَّ ثلاثة أيام. نَظِّمْ جدولاً يربط بين عدد الأيام وعدد اللوحات التي رسمها بشار إذا عمل 4 أسابيع في المرسم. اكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول. هل يمثل الجدول نمطاً؟ هل يمثل متتالية؟

فكرة الدرس

- التعرف إلى المتتابعة والمتتابعة الحسابية وخواصها
- المفردات
- المتتابعة
- المتتابعة الحسابية
- الحد العام
- المتتابعة الثابتة
- أساس المتتابعة

[1-3-1] المتتابعة والدالة

The sequence and function

تعرفت سابقاً إلى الدالة وكيفية تحديد مجالها ومداها والآن سوف نتعرف إلى المتتابعة كدالة وكيفية التعبير عنها وكتابة حدودها وكما يأتي: إن المتتابعة $f: N \rightarrow R$ (Sequence) هي دالة تمثلها مجموعة الأزواج المرتبة $\{(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3)), \dots, (n, f(n)), \dots\}$ إذ إن المساقط الأولى هي مجموعة الأعداد الطبيعية (متتابعة غير منتهية infinite sequence ويرمز لها $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ أو $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$) أو مجموعة جزئية منها (متتابعة منتهية finite sequence ويرمز لها $\{f(n)\}_{n=1}^m$ أو $\{u_n\}_{n=1}^m$)، ولذا اكتفينا بكتابة المساقط الثانية (الصور) $\{(f(1)), (f(2)), (f(3)), \dots, (f(n)), \dots\}$ ويسمى u_n بالحد العام للمتتابعة وأن $u_n = f(n)$. والمتتالية تكتب $\{u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_i, \dots\}$ أو $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_i, \dots$.

مثال (1) نَظِّمْ جدولاً يربط بين عدد الأيام وعدد اللوحات. اكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول.

6	5	4	3	2	1	عدد اللوحات
18	15	12	9	6	3	عدد الأيام

هل يمثل الجدول نمطاً؟ هل يمثل متتابعة؟

الأزواج المرتبة $\{(1,3), (2,6), (3,9), (4,12), (5,15), (6,18)\}$

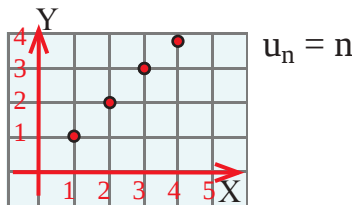
نعم يمثل نمطاً والعلاقة تمثل "ثلاثة أمثال" والعلاقة تمثل متتابعة حدّها العام هو

$u_n = 3n, n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، وتكتب بالشكل الآتي: $\{u_n\} = \{3n\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

مثال (2) اكتب الأزواج المرتبة الخمسة الأولى للمتتابعة $\{u_n\}$ ومثلها في المستوي الإحداثي:

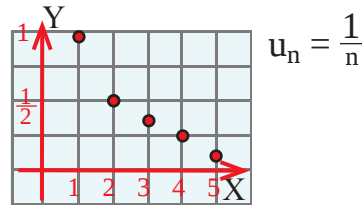
i) $\{n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$



ii) $\{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$

$\{(1,1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), (4, \frac{1}{4}), (5, \frac{1}{5})\}$



Arithmetic sequence

(i) المتتابعة الحسابية: هي المتتابعة التي يكون فيها ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة عدداً ثابتاً ويسمى أساس المتتابعة (الفرق المشترك Common Difference)، ويرمز له $d = u_{n+1} - u_n$. ويمكن كتابة المتتابعة بمعرفة حدها الأول $u_1 = a$ وأساسها d . وقانون الحد العام للمتتابعة الحسابية هو $u_n = a + (n-1)d$ حيث $n \in \mathbb{N}$. ويمكن تحديد نوع المتتابعة بصورة عامة كما يلي:

(i) المتتابعة المتزايدة وفيها $d > 0$ مثال $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$.

(ii) المتتابعة المتناقصة: وفيها $d < 0$ مثال $\{4, 2, 0, -2, -4, \dots\}$.

(iii) المتتابعة الثابتة وفيها $d = 0$ مثال $\{5, 5, 5, 5, 5, \dots\}$.

مثال (3) اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الحسابية الآتية:

(i) متتابعة حسابية الحد الأول فيها 3 وأساسها 6.

$$\{3, 9, 15, 21, 27\}$$

(ii) متتابعة حسابية الحد الأول فيها 1 وأساسها -3.

$$\{1, -2, -5, -8, -11\}$$

(iii) متتابعة حسابية حدها السابع 36 وأساسها 4.

$$u_7 = a + (n-1)d \Rightarrow u_7 = a + 6d \Rightarrow 36 = a + 6 \times 4 \Rightarrow a = 12$$

$$\{12, 16, 20, 24, 28\}$$

$$u_1 \xRightarrow{+d} u_2 \xRightarrow{+d} u_3 \xRightarrow{\dots} u_n$$

اكتب حدود للمتتابعات الآتية:

مثال (4)

(i) متتابعة حسابية حدها الثالث 8 و $d = -3$. جد الحدود بين u_7 و u_{11} .

$$\left. \begin{aligned} u_n = a + (n-1)d \Rightarrow u_3 = a + 2d \Rightarrow 8 = a - 6 \Rightarrow a = 8 + 6 = 14 \\ u_n = a + (n-1)d \Rightarrow u_7 = a + 6d \Rightarrow u_7 = 14 + 6(-3) \Rightarrow u_7 = -4 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{نجد قيمة } a \text{ ومنها نحصل} \\ \text{على قيمة الحد 7 والحدود} \\ \text{التي تليه} \end{array}$$

$$u_8 = u_7 + d = -4 - 3 = -7, \quad u_9 = u_8 + d = -7 - 3 = -10$$

$$u_{10} = u_9 + d = -10 - 3 = -13, \quad \{-7, -10, -13\}$$

حدود المتتالية

(ii) اكتب الحد العشرين من المتتابعة الحسابية $\{6, 1, -4, -9, \dots\}$ وحدد ما إذا كانت المتتابعة متناقصة أم متزايدة.

$$d = u_{n+1} - u_n \Rightarrow d = 1 - 6 = -5, \quad a = 6$$

$$u_n = a + (n-1)d \Rightarrow u_{20} = a + 19d \Rightarrow u_{20} = 6 + 19(-5) \Rightarrow u_{20} = -89$$

بما أن d أصغر من صفر، لذا إنّ المتتابعة متناقصة.

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

مثال (5)

$$\text{i) } \{2n-1\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad \text{ii) } \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1\}$$

$$\text{iii) } \{7\} = \{7, 7, 7, 7, 7\}, \quad \text{iv) } \left\{\frac{n}{3}\right\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}$$

$$\text{v) } \{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, 25\}, \quad \text{vi) } \{n^3\} = \{1, 8, 27, 64, 125\}$$

تأكّد من فهمك اكتب الأزواج المرتبة الأربعة الأولى للمتتابعة التي حدها العام معطى:

1 $u_n = 3n$

2 $u_n = n - 4$

3 $u_n = 3n^2$

4 $u_n = \frac{1}{2n}$

5 $u_n = 3n - 1$

الأسئلة (1 - 5)

مشابهة للمثال (2)

الأسئلة (6 - 8)

مشابهة للمثال (3)

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الآتية:

6 متتابعة حسابية الحد الأول فيها 1 وأساسها 5. 7 متتابعة حسابية الحد الأول فيها 5 وأساسها 2.

8 متتابعة حسابية الحد الأول فيها 3 وأساسها 4 .

اكتب حدود للمتتابعات الآتية:

9 جد الحدود بين u_8 و u_{12} لمتتابعة حسابية حدها الثالث 9 و $d = -2$.

10 جد الحدود بين u_6 و u_{10} لمتتابعة حسابية حدها الثاني 11 و $d = -3$.

11 اكتب الحد الثالث والعشرين من المتتابعة الحسابية $\{3, -1, -5, -9, \dots\}$.

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

12 $\{4n\} = \dots\dots\dots$

13 $\{2n - 5\} = \dots\dots\dots$

الأسئلة (12 - 15)

14 $\left\{\frac{1}{n+1}\right\} = \dots\dots\dots$

15 $\{9\} = \dots\dots\dots$

مشابهة للمثال (5)

اكتب الأزواج المرتبة الأربعة الأولى للمتتابعة التي حدها العام معطى:

تدرب وحلّ التمرينات

16 $u_n = 10 - 4n$

17 $u_n = n^2 - 1$

18 $u_n = \frac{1}{3n+1}$

19 اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة الآتية:

متتابعة حسابية الحد السابع فيها $\frac{1}{24}$ وأساسها $\frac{1}{3}$.

اكتب حدود للمتتابعات الآتية:

20 جد الحدود بين u_{10} و u_{13} لمتتابعة حسابية حدها السابع $\frac{13}{2}$ و $d = 1$.

21 جد الحدود بين u_{20} و u_{23} لمتتابعة حسابية حدها الثاني 0 و $d = -1$.

حدّد نوع المتتابعة (متزايدة ، متناقصة ، ثابتة) لكل مما يأتي:

22 $\{u_n\} = \{3 - 2n\}$

23 $\{u_n\} = \{n^3 - 1\}$

24 $\{u_n\} = \left\{\frac{1}{n+2}\right\}$

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

25 $\left\{\frac{3n}{2}\right\} = \dots\dots\dots$

26 $\{\sqrt{3}\} = \dots\dots\dots$

27 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \dots\dots\dots$



28 **رياضة الجري:** في إحدى مسابقات الجري، سُجِّلت أوقات الفائز الأول وفقاً للجدول الآتي:

المسافة بالكيلومتر	1	2	3	4	5
الوقت بالدقيقة والثانية	3.12	6.32	9.52	12.72	15.92

اكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول. هل يمثل الجدول نمطاً؟ هل يمثل متتابعة؟ علل إجابتك.



29 **رياضة القفز بالزانة:** يبين الجدول التالي محاولات أحد أبطال العالم في رياضة سباق القفز بالزانة.

المحاولة	1	2	3	4	5
الارتفاع بالمتر	5.90	5.95	6.00	6.05	6.10

اكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول. هل يمثل الجدول نمطاً؟ هل يمثل متتابعة؟ علل إجابتك.



30 **زراعة:** اشترى حسّان مزرعة لتربية الأبقار وبعد سنة أصبح فيها 20 بقرة، وبدأت تزداد كلّ سنة نتيجة الولادات بمعدل ثابت حتى أصبح عددها الضعف بعد مضي ست سنوات. مثل المسألة بجدول واكتب الأزواج المرتبة فيه. هل يمثل الجدول نمطاً؟ هل يمثل متتابعة؟ علل إجابتك.

فكّر

31 **تحذّر:** جد قيمة x التي تجعل الحدود الثلاثة الأولى للمتتابعة الحسابية كما يأتي:

$$\{2x, x + 1, 3x + 11, \dots\}$$

32 **أصحّ الخطأ:** قالت رابحة أنّ المتتابعة التي حدها العام $u_n = 8 - 2n$ متتابعة متزايدة لأن $d > 0$. اكتشف خطأ رابحة وصحّحه.

33 **حسّ عدديّ:** ماهو الحد الحادي عشر لمتتابعة حدها الثالث 4 وأساسها $\frac{1}{2}$ - ؟

أكتب

الحد الذي ترتيبه 101 في المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس 4 - وأساسها 2.

Compound Inequalities



تعلم

تقاس درجات حرارة الجو خلال اليوم الواحد بدرجة الحرارة السيليزية الصغرى والكبرى لكونها متغيرة من وقت لآخر. فإذا كانت درجة الحرارة السيليزية الصغرى في مدينة بغداد في شهر كانون الأول 8°C ودرجة الحرارة السيليزية الكبرى 15°C . اكتب متباينة تمثل درجة الحرارة في بغداد وجد حلّها.

فكرة الدرس

- حل المتباينات التي تحتوي أدوات الربط (و) ، (أو) وتمثيل الحل على مستقيم الأعداد.

المفردات

- المتباينة المركبة
- التقاطع
- الاتحاد
- مجموعة الحل

[1-4-1] المتباينات المركبة التي تتضمن (و)

Compound inequalities contain “and”

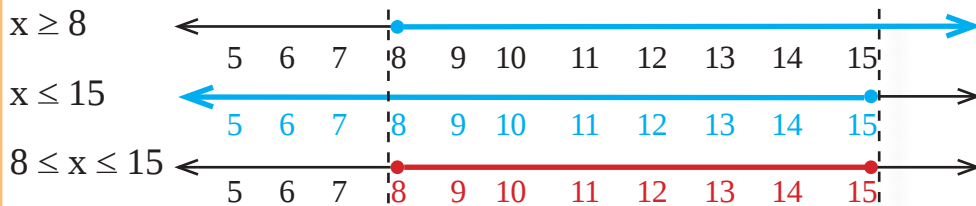
تعرفت سابقاً إلى المتباينات الجبرية وخواصها وكيفية إيجاد مجموعة الحل لها وتمثيله على مستقيم الأعداد، والآن سوف نتعرف إلى المتباينات المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و) وكيفية إيجاد مجموعة الحل لها وتمثيله على مستقيم الأعداد الحقيقية. المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و) مؤلفة من متباينتين فإنها تكون صحيحة فقط إذا كانت المتباينتان صحيحتين، وعليه فإن مجموعة الحل لها عبارة عن مجموعة تقاطع حل المتباينتين، ويمكن إيجاده بطريقتين الأولى بيانياً بتمثيل حل المتباينتين على مستقيم الأعداد ثم تحديد منطقة التقاطع، والثانية جبرياً وذلك بإيجاد مجموعة الحل لكل متباينة ثم أخذ مجموعة التقاطع لهما $(S = S_1 \cap S_2)$.

مثال (1)

اكتب المتباينة المركبة التي تمثل درجة الحرارة السيليزية الصغرى والكبرى في بغداد وجد حلها.

درجة الحرارة (الصغرى) لا تقل عن 8° ($x \geq 8$)، درجة الحرارة (الكبرى) لا تزيد على 15° ($x \leq 15$)،

لا تقل درجة الحرارة عن 8° ولا تزيد على 15° ($x \geq 8$ و $x \leq 15$)، ويمكن حلها بإحدى الطريقتين:



الطريقة الأولى: بيانياً

وتقرأ x أكبر من أو تساوي 8

وأقل من أو تساوي 15

$$8 \leq x \leq 15 \Leftrightarrow x \geq 8 \text{ و } x \leq 15$$

الطريقة الثانية: جبرياً

$$\Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = \{x: x \geq 8\} \cap \{x: x \leq 15\} = \{x: 8 \leq x \leq 15\}$$

مثال (2)

حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و) $-3 \leq 3x+2 < 9$ جبرياً ومثل الحل على مستقيم الأعداد:

$$-3 \leq 3x+2 < 9 \Rightarrow -3-2 \leq 3x+2-2 < 9-2 \Rightarrow -5 \leq 3x < 7 \Rightarrow \frac{-5}{3} \leq \frac{3x}{3} < \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-5}{3} \leq x < \frac{7}{3} \Rightarrow S = \{x: \frac{-5}{3} \leq x < \frac{7}{3}\}$$



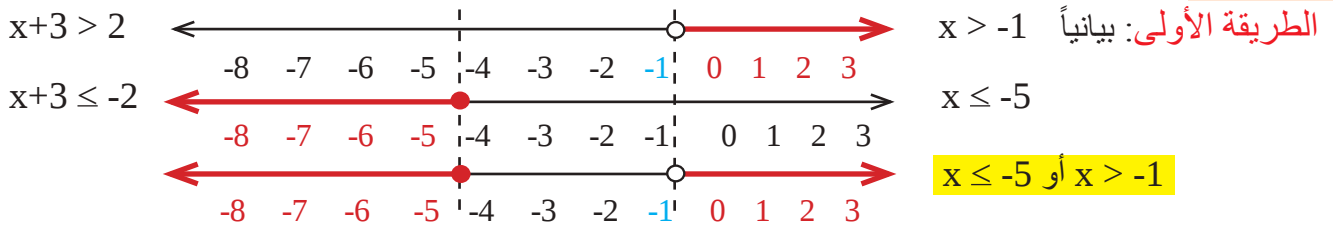
[1-4-2] المتباينات المركبة التي تتضمن (أو)

Compound inequalities contain "or"

بعد أن تعرفت إلى المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و) سوف نتعرف إلى المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (أو) وتكون صحيحة فقط إذا كانت إحدى المتباينتين المكونتين لها في الأقل صحيحة، وعليه فإن مجموعة الحل لها عبارة عن مجموعة اتحاد حل المتباينتين، ويمكن إيجاد بطريقتين الأولى بيانياً بتمثيل حل المتباينتين على مستقيم الأعداد ثم تحديد منطقة الاتحاد، والثانية جبرياً وذلك بإيجاد مجموعة الحل لكل متباينة ثم أخذ مجموعة الاتحاد لهما $(S = S_1 \cup S_2)$.

مثال (3)

حل المتباينة المركبة $x+3 > 2$ أو $x+3 \leq -2$ بيانياً وجبرياً.

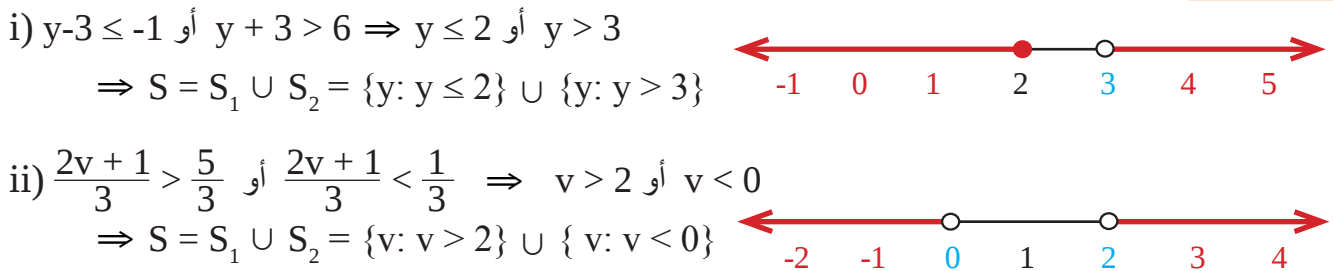


الطريقة الثانية: جبرياً

$$x+3 > 2 \text{ أو } x+3 \leq -2 \Rightarrow \begin{cases} x+3 > 2 \text{ أو } x+3 \leq -2 \\ x > -1 \text{ أو } x \leq -5 \end{cases} \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{x: x > -1\} \cup \{x: x \leq -5\}$$

مثال (4)

حل المتباينة التي تتضمن (أو) جبرياً ومثل الحل على مستقيم الأعداد:



[1-4-3] المتباينة المثلثية

Triangular inequality

من المواضيع التي تربط الجبر بالهندسة هي المتباينة المثلثية "في كل مثلث مجموع طول ضلعين من أضلاعه يكون أكبر من طول الضلع الثالث" وتستخدم في الإنشاءات الهندسية والتصاميم، إذا كانت أطوال أضلاع مثلث (A, B, C) فيجب أن تكون المتباينات الثلاث التالية صحيحة: $A+B > C$, $A+C > B$, $B+C > A$.

مثال (5)

(i) هل يمكن للقطع المستقيمة التي طولها 2cm، 10cm، 13cm أن تشكل مثلثاً؟

لا يمكن أن تشكل مثلثاً لأنه: خطأ $2 + 10 > 13$ ، صحيحة $10 + 13 > 2$ ، صحيحة $2 + 13 > 10$.

(ii) اكتب متباينة مركبة تبين طول الضلع الثالث في مثلث طول ضلعين فيه 10cm، 8cm.

نفرض طول الضلع الثالث x ومنه:

$$\left. \begin{aligned} 8+10 > x &\Rightarrow 18 > x \Rightarrow \text{الضلع الثالث أصغر من 18} \\ 8+x > 10 &\Rightarrow x > 2 \Rightarrow \text{الضلع الثالث أكبر من 2} \\ 10+x > 8 &\Rightarrow x > -2 \Rightarrow \text{لا تعطي أية معلومات مفيدة} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{ولذا يجب أن يكون طول الضلع أصغر من 18 وأكبر من 2 وبالمتباينة المركبة} \\ &\text{تبيّن طول الضلع الثالث } 2 < x < 18 \end{aligned}$$

تأكد من فهمك حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) بيانياً:

1 $-4 \leq y - 1 < 3$

2 $-4 \leq z + 2 \leq 8$

الأسئلة (1 - 2)

مشابهة للمثال (1)

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبرياً ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

3 $x + 6 \geq 12$ و $x + 6 < 15$

4 $-9 < 2x - 1 \leq 3$

الأسئلة (3 - 4)

مشابهة للمثال (2)

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) بيانياً:

5 $8y \geq 64$ أو $8y \leq 32$

6 $\frac{2z}{3} < \frac{2}{3}$ أو $\frac{2z}{3} \geq \frac{8}{9}$

الأسئلة (5 - 6)

مشابهة للمثال (3)

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً ومثل الحل على مستقيم الأعداد:

7 $3n - 7 > -5$ أو $3n - 7 \leq -9$

8 $x + 15 \geq 30$ أو $x + 15 < 22$

الأسئلة (7 - 8)

مشابهة للمثال (4)

هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه كما يأتي:

9 1cm, 2cm, $\sqrt{3}$ cm

10 5cm, 4cm, 9cm

الأسئلة (9 - 12)

11 1cm, $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{2}$ cm

12 3cm, 4cm, $2\sqrt{3}$ cm

مشابهة للمثال (5)

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) بيانياً:

13 $x > -12$ و $x \leq -7$

14 $2 \leq y + 4 < 6$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبرياً ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

15 $14 \leq 3x + 7$ و $3x + 7 < 26$

16 $\frac{1}{25} \leq \frac{z+3}{5} \leq \frac{1}{15}$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) بيانياً:

17 $z - 2 < -7$ أو $z - 2 > 4$

18 $x - 6 \leq -1$ أو $x - 6 > 4$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً ومثل الحل على مستقيم الأعداد:

19 $x + 8 < 22$ أو $x + 10 \geq 30$

20 $y < -1$ أو $y + 3 > 2$

21 $\frac{y}{2} < 3\frac{1}{2}$ أو $\frac{y}{2} > 7\frac{1}{2}$

22 $5x \leq -1$ أو $5x \geq 4$

اكتب المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث في المثلث إذا كان طولاً ضلعي المثلث معلومين:

23 3cm, 10cm

24 6cm, 4cm

25 1cm, 3cm

تدرب وحل مسائل حياتية



26 **صوت:** أذن الإنسان يمكن أن تسمع الأصوات التي لا يقل ترددها عن 20 هرتزاً ولا يزيد على 20000 هرتز. اكتب متباينة مركبة تمثل الترددات التي لاتسمعها أذن الإنسان، ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.



27 **إطار السيارات:** ضغط الهواء المثالي الموصى به لإطارات السيارات الصالون لا يقل عن 28 Pascal (kg/ing^2) ولا يزيد على 36 Pascal. اكتب متباينة مركبة تمثل الضغط، ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

ملاحظة: باسكال (pascal) وحدة قياس ضغط الهواء مقدرة kg/ing^2



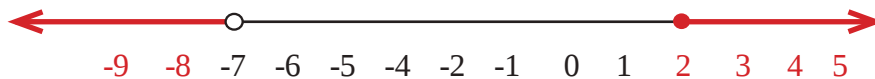
28 **القطار المغناطيسي:** القطار المغناطيسي المعلق وهو قطار يعمل بقوة الرفع المغناطيسية وباختصار يعرف بالماجليف (Maglev). وصُممت أنواع مختلفة من هذه القطارات المغناطيسية في مختلف دول العالم إذ إنّ سرعتها لاتقل عن 300 k/h ولا تزيد على 550 k/h. اكتب متباينة تمثل سرعة القطار، ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

فكّر

29 **تحدّ:** اكتب متباينة مركبة تبين مدى طول الضلع الثالث في كل مثلث:

7cm, 12cm, x cm

30 **أصحّ الخطأ:** قالت سوسن إنّ المتباينة المركبة $x+3 \leq 5$ و $-4 < x+3$ تمثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد الآتية:



بيّن خطأ سوسن وصحّحه.

31 **حسّ عدديّ:** اذكر ما إذا كانت الأطوال الثلاثة هي لمثلث أم لا؟ وضح إجابتك.

i) 3.2cm, 5.2cm, 6.2cm

ii) 1cm, 1cm, $\sqrt{2}$ cm

أكتب

متباينة مركبة التي تمثل درجة الحرارة الصغرى 18° ودرجة الحرارة العظمى 27° .

Absolute Value Inequalities



تعلم

فندق بابل من الفنادق السياحية في العاصمة بغداد ويقع في منطقة الكرادة. درجة حرارة الماء المثالية في حوض السباحة 25 درجة سيليزية تزداد أو تنقص بمقدار درجة واحدة. اكتب متباينة قيمة مطلقة تمثل مدى درجة حرارة الماء في حوض السباحة.

فكرة الدرس

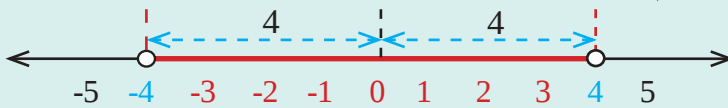
- حل المتباينات التي تحتوي على قيمة مطلقة.

المفردات

- القيمة المطلقة

[1-5-1] متباينات القيمة المطلقة التي على صورة $|g(x)| < a$ ، $|g(x)| \leq a$ حيث $x \in \mathbb{R}$ Absolute value inequalities with form $|g(x)| < a$ ، $|g(x)| \leq a$, $a \in \mathbb{R}$

تعرفت سابقاً إلى المتباينات المركبة التي تحتوي على (و) و (أو) وكيفية حلها بيانياً وجبرياً وكيفية تمثيل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد. والآن سوف نتعرف إلى متباينة القيمة المطلقة التي على صورة $|g(x)| < a$ ، $|g(x)| \leq a$ ، $a \in \mathbb{R}$ مثل $|x| < 4$ وتعني: ما هي قيم x التي تبعد عن الصفر بأقل من 4 وحدات؟ وهي كل الأعداد التي بين العددين -4 و 4 وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو:



ونلاحظ أن حل هذه المتباينة هو $x < 4$ و $-4 < x$

أي إن متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أصغر من (أصغر من أو يساوي) تمثل متباينة مركبة تتضمن (و).

بصورة عامة $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$, $a > 0$

اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل درجة حرارة الماء في الحوض ومثله بيانياً.

مثال (1)

نفرض درجة حرارة الماء هي x درجة سيليزية، لذا المتباينة التي تمثل درجة حرارة الحوض عندما لا تزيد على 26⁰ سيليزية:

$$x \leq 25 + 1 \Rightarrow x - 25 \leq 1$$

|

والمتباينة التي تمثل درجة حرارة الحوض عندما لا تنقص عن 24⁰ درجة سيليزية:

$$x \geq 25 - 1 \Rightarrow x - 25 \geq -1$$

لذا متباينة القيمة المطلقة هي المتباينة المركبة التي تمثل مدى درجة حرارة الماء في حوض السباحة:

$$x - 25 \geq -1 \text{ و } x - 25 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x - 25 \leq 1 \Rightarrow |x - 25| \leq 1$$

وتمثيل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد هو



حل متباينات القيمة المطلقة، ومثل الحل على مستقيم الأعداد.

مثال (2)

$$i) |x + 6| < 3 \Rightarrow -3 < x + 6 < 3 \Rightarrow -3 - 6 < x < 3 - 6$$

$$\Rightarrow -9 < x < -3$$



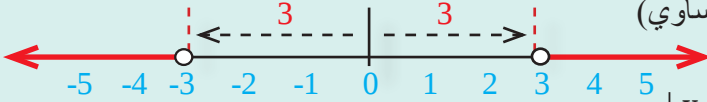
$$ii) |y| - 5 \leq 1 \Rightarrow |y| \leq 1 + 5 \Rightarrow |y| \leq 6$$

$$\Rightarrow -6 \leq y \leq 6$$



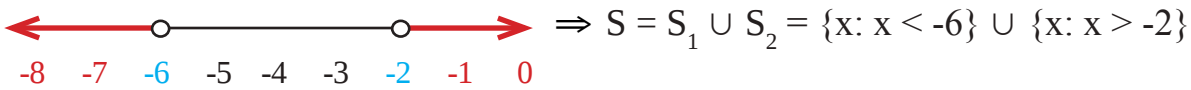
1-5-2] متباينات القيمة المطلقة التي على صورة $|g(x)| \geq a$ ، $|g(x)| > a$ حيث $x \in \mathbb{R}$ Absolute value inequalities with form $|g(x)| > a$ ، $|g(x)| \geq a$, $a \in \mathbb{R}$

بعد أن تعرفت إلى متباينة القيمة المطلقة التي تحتوي على صورة $|g(x)| \leq a$ ، $|g(x)| < a$ حيث $x \in \mathbb{R}$ والآن سوف نتعرف إلى متباينة القيمة المطلقة التي على صورة $|g(x)| \geq a$ ، $|g(x)| > a$ حيث $x \in \mathbb{R}$ وتنعني: المسافة بين x والصفر أكبر من 3 أي أن $x < -3$ أو $x > 3$ ومجموعة حل المتباينة هو $\{x: x < -3\} \cup \{x: x > 3\}$ لذا فإن متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أكبر من (أكبر من أو يساوي) هي علاقة مركبة تتضمن (أو). بصورة عامة $|x| \geq a \iff x \geq a$ أو $x \leq -a$, $a > 0$

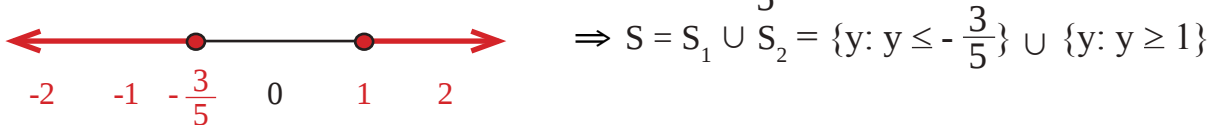


مثال (3) حل متباينة القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد.

i) $|x + 4| > 2 \Rightarrow x + 4 < -2$ أو $x + 4 > 2 \Rightarrow x < -6$ أو $x > -2$



ii) $|5y - 1| \geq 4 \Rightarrow 5y - 1 \leq -4$ أو $5y - 1 \geq 4 \Rightarrow y \leq -\frac{3}{5}$ أو $y \geq 1$



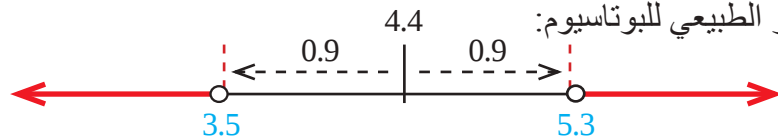
iii) في تحليلات دم الإنسان البالغ يعد المدى الطبيعي للبوتاسيوم هو $(3.5 - 5.3) \text{ mol/L}$. اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم في دم الإنسان.

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية وأقل من القيمة الدنيا للمعدل هي: $x < 3.5$

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية وأكبر من القيمة العليا للمعدل هي: $x > 5.3$

المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم هو حل المتباينة المركبة: $x < 3.5$ أو $x > 5.3$

نجد متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم:



نأخذ منتصف المسافة بين نقطتين ونطرح ونضيف نصف قطر المسافة

$$x < 3.5 \text{ أو } x > 5.3 \iff x < 4.4 - 0.9 \text{ أو } x > 4.4 + 0.9$$

$$\iff x - 4.4 < -0.9 \text{ أو } x - 4.4 > 0.9 \iff |x - 4.4| > 0.9$$

مثال (4) جد مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة الآتية:

i) $|2x - 5| + 3 < 11 \Rightarrow |2x - 5| < 8 \Rightarrow -8 < 2x - 5 < 8 \Rightarrow -3 < 2x < 13$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{13}{2} \Rightarrow \{x: x > -\frac{3}{2}\} \cap \{x: x < \frac{13}{2}\} \Rightarrow \{x: -\frac{3}{2} < x < \frac{13}{2}\}$$

ii) $|7 - y| < 8 \Rightarrow -8 < 7 - y < 8 \Rightarrow -15 < -y < 1 \Rightarrow -1 < y < 15 \Rightarrow \{y: y > -1\} \cap \{y: y < 15\}$

iii) $|\frac{2t-8}{4}| \geq 9 \Rightarrow |\frac{2(t-4)}{4}| \geq 9 \Rightarrow |\frac{t-4}{2}| \geq 9 \Rightarrow |t-4| \geq 18$

$$\Rightarrow t - 4 \leq -18 \text{ أو } t - 4 \geq 18 \Rightarrow t \leq -14 \text{ أو } t \geq 22 \Rightarrow \{t: t \leq -14\} \cup \{t: t \geq 22\}$$

iv) $|\frac{5-3v}{2}| \geq 6 \Rightarrow |5-3v| \geq 12 \Rightarrow 5-3v \leq -12 \text{ أو } 5-3v \geq 12 \Rightarrow -3v \leq -17 \text{ أو } -3v \geq 7$

$$\Rightarrow v \geq \frac{17}{3} \text{ أو } v \leq -\frac{7}{3} \Rightarrow \{v: v \geq \frac{17}{3}\} \cup \{v: v \leq -\frac{7}{3}\}$$

تأكد من فهمك اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المسائل التالية:

- 1 تعد درجة الحرارة المثلى داخل الشقق 22° سيليزية بزيادة أو نقصان لا يتجاوز 2° سيليزية. الأسئلة (1 - 2) مشابهة للأمثلة (1،3)
- 2 الزاوية القائمة تتحول إلى زاوية حادة أو منفرجة إذا تحرك مؤشر الزاوية إلى اليمين أو إلى اليسار في الأقل بدرجة واحدة.

حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد.

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|-------------------|
| 3 $ x + 1 < 5$ | 4 $ 3z - 7 \leq 2$ | الأسئلة (3 - 6) |
| 5 $ x + 8 < 9$ | 6 $ 5y - 2 \leq 8$ | مشابهة للمثال (2) |
| 7 $ x + 4 > 6$ | 8 $ 5z - 9 > 1$ | الأسئلة (7 - 10) |
| 9 $ 2x + 7 \geq 8$ | 10 $ 4y - 2 > 3$ | مشابهة للمثال (3) |
| 11 $ 5 - x < 10$ | 12 $ 4z - 14 > 2$ | الأسئلة (11 - 14) |
| 13 $ \frac{x - 12}{4} \leq 9$ | 14 $ \frac{6 - 2y}{4} \geq 9$ | مشابهة للمثال (4) |

اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المسائل الآتية:

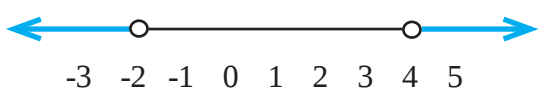
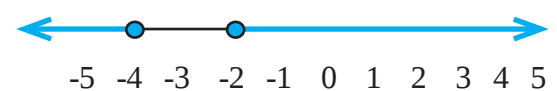
تدرب وحل التمرينات

- 15 يجب أن تبقى درجة الحرارة داخل الثلاجة 8° سيليزية بزيادة أو نقصان لا يتجاوز 0.5° سيليزية. اكتب مدى درجة الحرارة المثالية في داخل الثلاجة.
- 16 درجة غليان الماء 100° سيليزية عند مستوى سطح البحر وتزداد وتنقص في المناطق الجبلية والوديان بما لا يتجاوز 20° سيليزية. اكتب مدى التذبذب في درجة غليان الماء.

حل متباينات القيمة المطلقة الآتية:

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------------|
| 17 $ x + 3 < 6$ | 18 $ x - 6 < 5$ |
| 19 $ 2z - 5 < 2$ | 20 $ y - 3 \geq \frac{1}{3}$ |
| 21 $2 x - 7 \geq 1$ | 22 $ 9y - 6 > 3$ |
| 23 $ 11z - 2 \geq 9$ | 24 $ 1 - x < 1$ |
| 25 $ \frac{4}{5}z - 1 > \frac{4}{5}$ | 26 $ \frac{z - 1}{7} \leq 2$ |

اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة لكل من التمثيلات البيانية الآتية:

- | | |
|--|---|
| 27  | 28  |
| 29  | 30  |

تدرب وحل مسائل حياتية اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل كل مسألة مما يأتي:



31 **الغريز:** حيوان الغريز هو أحد أنواع الثدييات، ينتمي إلى شعبة الحبليات، ويمتلك قوائم قصيرة نوعاً ما، ويعيش في الحُفر التي يحفرها في الأرض، طول جسمه من الرأس الى الذيل يصل من 68cm إلى 76cm. اكتب مدى طول الغريز.



32 **صحة:** معدل النبض (عدد دقات القلب) الطبيعي للإنسان البالغ يتراوح من 60 الى 90 نبضة في الدقيقة. اكتب مدى عدد الدقات غير الطبيعية لقلب الإنسان.



33 **مواصلات:** تطير الطائرات المدنية على ارتفاع يتراوح من 8km إلى 10km إذ تعد منطقة جوية معتدلة. اكتب مدى منطقة الطيران المدنية.

فكّر

34 **تحذّر:** حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد.

i) $\left| \frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}} \right| \leq \sqrt{6}$

ii) $\left| \frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}y}{\sqrt{5}} \right| \geq \sqrt{15}$

35 **أصحّ الخطأ:** قالت خلود إن متباينة القيمة المطلقة $|6 - 3y| \geq 7$ تمثل متباينة مركبة بعلاقة (و) ومجموعة

الحل لها: $\{y: -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{13}{2}\}$. بيّن خطأ خلود وصحّحه.

36 **حسّ عدديّ:** اكتب مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة التالية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

i) $|z| - 1 < 0$

ii) $|x - 1| > 0$

أكتب

متباينة قيمة مطلقة تمثل موقفاً من واقع الحياة، ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.



تعلم

أظهرت دراسة مسحية أنّ 62% من الشباب يمارسون رياضة كرة القدم، فإذا كان هامش الخطأ ضمن 4 نقاط مئوية. فجدّ مدى النسبة المئوية للشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم.

فكرة الدرس

- استعمال استراتيجية
- افهم المسألة لحل المسألة.

افهم

ما المعطيات في المسألة؟ 62% من الشباب يمارسون رياضة كرة القدم، هامش الخطأ هو 4 نقاط.
ما المطلوب من المسألة؟ إيجاد مدى النسبة المئوية التي تمثل الشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم.

خطّ

كيف تحل المسألة؟ بما أن النسبة المئوية للشباب الذين يمارسون كرة القدم هي 62% والنسبة الواردة في الدراسة أقل من أو تساوي 4%، لذا $|x - 62| \leq 4$ إذ x تمثل النسبة الفعلية للشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم.

حلّ

نجد مجموعة الحل لمتباينة القيمة المطلقة:

$$|x - 62| \leq 4 \Rightarrow x - 62 \geq -4 \text{ و } x - 62 \leq 4$$

$$\Rightarrow x \geq -4 + 62 \text{ و } x \leq 4 + 62$$

$$\Rightarrow x \geq 58 \text{ و } x \leq 66$$

$$\Rightarrow \{x: x \geq 58\} \cap \{x: x \leq 66\}$$

$$\Rightarrow \{x: 58 \leq x \leq 66\}$$

مدى نسبة الشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم

استعمل مستقيم الأعداد للتحقق من صحة الحل:

تحقق



حل المسائل التالية باستراتيجية (افهم المسألة)



1

سمك السلمون: متوسط عمر سمك السلمون من سنتين إلى ثماني سنوات، كما أنه يكون مهدداً بالخطر عند ارتفاع درجة حرارة المياه، فهو يعيش في درجة حرارة تتراوح من 20 درجة سيليزية إلى 23 درجة، اكتب متباينة تمثل درجة المياه التي لا يعيش فيها سمك السلمون واكتب مجموعة الحل.



2

دب الباندا: تلد أنثى الباندا صغيراً واحداً أو اثنين ويحتاج الصغير إلى حليب أمه لأكثر من (6 إلى 14) مرة في اليوم، صغار الباندا العملاقة تزن من 40kg الى 60kg في عام واحد، ويعيشون مع أمهاتهم حتى سنتين من العمر. اكتب متباينة تمثل وزن صغير الباندا عندما يكون عمره سنة واحدة واكتب مجموعة الحل.



3

خلية النحل: لاحظ أنور من خلال دراسة مسحية على خلية نحل أن 88% من ذكور النحل يطردون من الخلية في نهاية الصيف، فإذا كان هامش الخطأ 3 نقاط مئوية. اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل مدى النسبة المئوية لذكور النحل الذين يُطردون من الخلية واكتب مجموعة الحل.



4

التلفريك: التلفريك أو المعبر الهوائي وهو من أرخص وأبسط وسائل النقل يعمل بالكهرباء ويعدُّ واسطة نقل في الدول التي تكثر فيها الجبال والأسطح الوعرة، وتلجأ إليه بعض الدول أيضاً كوسيلة للترفيه ومشاهدة المناظر كما في شمال العراق. أقل سرعة لعربات التلفريك 20km/h وأكبر سرعة 40km/h. اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تبين مدى سرعة عربات التلفريك واكتب مجموعة الحل.

English	عربي	English	عربي
general term	الحد العام	real number	العدد الحقيقي
constant sequence	المتتابعة الثابتة	rooting	تجذير
common difference	أساس المتتابعة	conjugate	المرافق
increasing sequence	المتتابعة المتزايدة	relation	العلاقة
decreasing sequence	المتتابعة المتناقصة	ordered Pair	زوج مرتب
compound inequality	المتباينة المركبة	function	الدالة
absolute value	القيمة المطلقة	surjective mapping	تطبيق شامل
absolute value Inq.	متباينة القيمة المطلقة	injective mapping	تطبيق متباين
intersection	التقاطع	bijective mapping	تطبيق متقابل
union	الاتحاد	domain	المجال
solution set	مجموعة الحل	co-domain	المجال المقابل
less than	أقل من	range	المدى
less than or equal	أقل من أو يساوي	composition of mapping	تركيب التطبيقات
greater than	أكبر من	sequence	متتابعة
greater than or equal	أكبر من أو يساوي	arithmetic sequence	متتابعة حسابية

ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية

الدرس [1-1]

تدريب 1: بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية واكتب الناتج لأقرب عُشر:

$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \dots\dots\dots$$

تدريب 2: استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقرباً لأقرب مرتبتين عشريتين:

$$6.25 \times 10^3 \div 0.015 \times 10^6 = \dots\dots\dots$$

مثال 1: بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية واكتب الناتج لأقرب عُشر:

$$\begin{aligned} & (-8)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{4} \sqrt{2} - \frac{1}{3} \sqrt{18} \right) \\ &= -2 \left(\frac{1}{4} \sqrt{2} - \sqrt{2} \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{2} \approx \frac{3}{2} \times 1.4 = 2.1 \end{aligned}$$

مثال 2: استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقرباً لأقرب مرتبتين عشريتين:

$$\begin{aligned} & 0.016 \times 10^4 + 1.957 \times 10^3 \\ &= 0.16 \times 10^3 + 1.957 \times 10^3 \\ &\approx 2.12 \times 10^3 \end{aligned}$$

تدريب: إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ وكان التطبيقان

$f: A \rightarrow A$ و $g: A \rightarrow A$ معرفين كما يأتي:

$$f = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$$

$$g = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

فجد تركيب الدالتين: i) $f \circ g$, ii) $g \circ f$

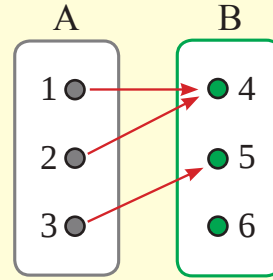
.....
.....

مثال: إذا كان التطبيق: $R: A \rightarrow B$ معطى كما يأتي:

$$R = \{(1,4), (2,4), (3,5)\}$$

$$B = \{4,5,6\}, A = \{1,2,3\}$$

حيث
مثّل التطبيق بمخطط سهمي، وحدّد المجال والمدى للتطبيق.



المخطط السهمي

المجال: $\{1, 2, 3\}$

المدى: $\{4,5\}$

تدريب 1: اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

i) $\{3n - 2\} = \dots\dots\dots$

ii) $\{(-2)^n\} = \dots\dots\dots$

تدريب 2: اكتب الحد العشرين من المتتابعة الحسابية:

$$\{12, 6, 0, -6, -12, \dots\}$$

.....
.....
.....

مثال 1: اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة $\{u_n\}$

i) $u_n = \frac{1}{n}$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

ii) $u_n = \frac{2n-1}{n}$

$$\left\{\frac{2n-1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots\right\}$$

مثال 2: اكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتابعة حسابية

حدها السابع 6 وأساسها 3 .

$$u_n = a + (n-1)d \rightarrow u_7 = a + 6d$$

$$\Rightarrow 6 = a + 6 \times 3 \Rightarrow a = -12$$

$$\{-12, -9, -6, -3, 0, \dots\}$$

تدريب 1: حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و) جبرياً
ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

$$-9 < 2x - 1 \leq 3$$

.....
.....
.....
.....

تدريب 2: حل المتباينة المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً
ومثل الحل على مستقيم الأعداد:

$$2y - 6 > -3 \text{ أو } 2y - 6 \leq -7$$

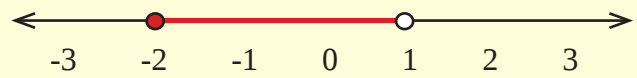
.....
.....
.....

مثال 1: حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و) جبرياً
ومثل الحل على مستقيم الأعداد:

$$2x - 2 \geq -6 \text{ و } 2x - 2 < 0 \Rightarrow -6 \leq 2x - 2 < 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq 2x < 2 \Rightarrow -2 \leq x < 1$$

$$\Rightarrow S = \{x : -2 \leq x < 1\}$$

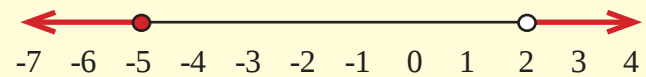


مثال 2: حل المتباينة المركبة جبرياً ومثلها على مستقيم الأعداد.

$$x + 1 > 3 \text{ أو } x + 1 \leq -4$$

$$\Rightarrow x > 2 \text{ أو } x \leq -5$$

$$\Rightarrow \{x : x > 2\} \cup \{x : x \leq -5\}$$



تدريب 1: حل متباينة القيمة المطلقة، ومثل الحل على مستقيم الأعداد.

$$|3y| - 1 \leq 8$$

.....
.....
.....

تدريب 2: حل متباينة القيمة المطلقة، ومثل الحل على مستقيم الأعداد.

$$\left| \frac{6-2x}{8} \right| \geq 3$$

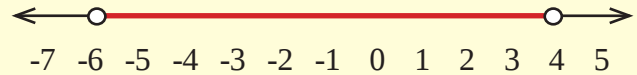
.....
.....
.....

مثال 1: حل متباينة القيمة المطلقة، ومثل الحل على مستقيم الأعداد.

$$|x + 1| < 5 \Rightarrow -5 < x + 1 < 5$$

$$\Rightarrow -5-1 < x < 5-1 \Rightarrow -6 < x < 4$$

$$\Rightarrow S = \{x : -6 < x < 4\}$$

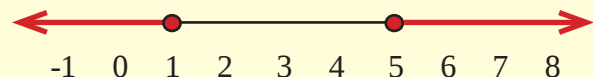


مثال 2: حل متباينة القيمة المطلقة، ومثل الحل على مستقيم الأعداد.

$$\left| \frac{3z-9}{6} \right| \geq 1 \Rightarrow \left| \frac{3(z-3)}{6} \right| \geq 1 \Rightarrow \left| \frac{z-3}{2} \right| \geq 1$$

$$\Rightarrow |z-3| \geq 2 \Rightarrow -2 \geq z-3 \text{ أو } z-3 \geq 2$$

$$\Rightarrow 1 \geq z \text{ أو } z \geq 5 \Rightarrow \{z : 1 \geq z\} \cup \{z : z \geq 5\}$$



بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية:

1 $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \dots$ 2 $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{8} - 5}{3\sqrt{2}} = \dots$

3 استعمال ترتيب العمليات والحاسبة لتكتب ما يلي مقرباً لأقرب عُشر:

$(\frac{1}{125})^{\frac{1}{3}} - (-\frac{1}{2})^0 + (121)^{\frac{1}{2}} \times (\frac{1}{9})^{\frac{1}{2}} = \dots$

4 إذا كان $f: z \rightarrow R$ حيث $f(x) = x^2$. ارسم مخططاً سهمياً للتطبيق وبيّن هل أنّ التطبيق متباين، شامل، أو متقابل؟

5 إذا كان التطبيق $f: N \rightarrow N$ إذ إنّ $f(x) = 3x + 1$ و $g: N \rightarrow N$ إذ $g(x) = x^2$.

جد: $(f \circ g)(5)$, $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(5)$, $(g \circ f)(2)$.

6 إذا كان التطبيق $f: R \rightarrow R$ حيث $f(x) = 3x + 1$ والتطبيق $g: R \rightarrow R$ إذ أنّ $g(x) = 2x + 5$.

هل أنّ $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ ؟ جد قيمة x إذا كانت $(f \circ g)(x) = 28$.

اكتب حدود للمتتابعات الآتية:

7 جد الحدود بين u_3 و u_8 لمتتابعة حسابية حدها الثاني $\frac{-3}{2}$ و $d = 2$.

8 جد الحدود بين u_4 و u_9 لمتتابعة حسابية حدها الثالث 6 و $d = -\frac{5}{2}$.

حدّد نوع المتتابعة (متزايدة، متناقصة، ثابتة) لكل مما يأتي:

9 $u_n = 9 - 3n$ 10 $u_n = n^2 - 2$ 11 $u_n = \frac{1}{3n+1}$

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

12 $\{\frac{n}{n+2}\} = \dots$ 13 $\{4\sqrt{2}\} = \dots$ 14 $\{\frac{-n}{n+5}\} = \dots$

حلّ المتباينات المركّبة ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

15 $x + 6 \geq 12$ و $x + 6 < 20$ 16 $\frac{1}{16} < \frac{z+2}{2} \leq \frac{1}{8}$ 17 $x - 3 \leq -5$ أو $x - 3 > 5$

18 $7t - 5 > -1$ أو $7t - 5 \leq -14$ 19 $y \leq 0$ أو $y + 7 \geq 16$ 20 $\frac{y}{3} < 1\frac{1}{3}$ أو $\frac{y}{3} > 9\frac{1}{3}$

اكتب المتباينة المركّبة التي تبين مدى طول الضلع الثالث في المثلث إذا كان طولاً ضلعي المثلث معلومين:

21 $4\text{cm}, 9\text{cm}$ 22 $5\text{cm}, 12\text{cm}$ 23 $7\text{cm}, 15\text{cm}$

حلّ متباينات القيمة المطلقة الآتية:

24 $|x - 6| \leq 3$ 25 $|3z - 5| < 4$ 26 $|x + 1| > \frac{1}{2}$

27 $6|x| - 8 \geq 3$ 28 $|3y| - 2 > 9$ 29 $|8z| - 1 > 7$

30 $|4 - 3y| \geq 14$ 31 $|\frac{6-3y}{9}| \geq 5$

المقادير الجبرية

Algebraic Expressions

- الدرس 2-1 ضرب المقادير الجبرية
- الدرس 2-2 تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر
- الدرس 2-3 تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات
- الدرس 2-4 تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة
- الدرس 2-5 تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو الفرق بين مكعبين
- الدرس 2-6 تبسيط المقادير الجبرية النسبية
- الدرس 2-7 خطة حل المسألة (الخطوات الأربع)

المدرسة المستنصرية مدرسة عريقة أُسست في زمن العباسيين في بغداد عام 1233، وكانت مركزاً علمياً وثقافياً مهماً. تقع في جهة الرصافة من بغداد، وتتوسط المدرسة ساحة مستطيلة الشكل فيها نافورة كبيرة فيها ساعة المدرسة المستنصرية، لو فرضنا أن طول الساحة الداخلية للمدرسة هو $(x+14)$ متراً وعرضها $(x+2)$ متراً، فيمكن حساب المساحة بضرب المقدارين الجبريين $(x+14)(x+2)$.

جد ناتج جمع المقادير الجبرية التالية أو طرحها:

1 $(3x^2 + 4x - 12) + (2x^2 - 6x + 10)$

2 $(\frac{1}{2}zy + 5z - 7y) - (\frac{1}{4}zy - 3z + 2y)$

جد ناتج الضرب للحدود الجبرية الآتية:

3 $7x^2 \times \frac{1}{14x}$

4 $\sqrt{2}yz \times \sqrt{2}yz^2$

5 $\frac{3}{4}v^2t \times \sqrt{12}t^{-1}$

6 $3h(\frac{1}{6}v - \frac{1}{3}h^{-2})$

جد ناتج ضرب مقدارين جبريين:

7 $(x+2)(x-2)$

8 $(5-2z)(3+3z)$

9 $(\frac{1}{2}x^2 + 6)(\frac{4}{3}x^2 + 12)$

10 $(2\sqrt{3}t - 4)^2$

11 $(x+3)(x^2 - 3x + 9)$

12 $(xy+1)(x^{-1}y - xy^{-1} - 1)$

جد ناتج الضرب باستعمال الطريقة العمودية:

13 $(y-1)(y+1)$

14 $(2x+3)(4x^2 - x - 5)$

15 $(3-z)(3+5z - z^2)$

جد ناتج قسمة المقادير الجبرية الآتية:

16 $\frac{3xy^2}{15x^2y}$

17 $\frac{-47z^{-2}}{7z^2}$

18 $\frac{8x^3 + 4x^2 - 2x}{2x}$

19 $\frac{21-14a+7a^2}{7a}$

حلل المقادير الجبرية باستعمال العامل المشترك الأكبر:

20 $3y^3 + 6y^2 - 9y$

21 $\frac{1}{2}zx^2 - 2z^2x + 4zx$

Multiplying Algebraic Expressions



تعلم

حوّطت حديقة منزلية مربعة الشكل
طول ضلعها h متر بممر عرضه 1
متر.
ما مساحة الممر بدلالة h ؟

فكرة الدرس

- ضرب مقدار جبري في مقدار جبري يمثل حالات خاصة.
- المفردات
- مربع مجموع
- مربع فرق
- مكعب مجموع
- مكعب فرق

[12-1-1] ضرب مقدارين جبريين كل منهما من حدين

Multiplying two algebraic expressions each of one contains two terms

تعلمت سابقاً كيفية ضرب حد جبري في حد جبري وكذلك ضرب مقدار جبري في مقدار جبري، الآن سوف تتعلم كيفية ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين ويمثلان مربع مجموع أو مربع فرق أو مجموع في فرق وذلك باستعمال الخواص التي درستها سابقاً من توزيع وابدال وترتيب.

مثال (1) جد مساحة الممر المحيط بالحديقة المربعة الشكل؟

مساحة الممر هي الفرق بين مساحتي المربع الكبير (الحديقة مع الممر) والمربع الصغير (الحديقة)

$$(h+2)^2 = (h+2)(h+2) = h^2 + 2h + 2h + 4 = h^2 + 4h + 4$$

مساحة الحديقة مع الممر

$$h \times h = h^2$$

مساحة الحديقة

$$(h^2 + 4h + 4) - h^2 = h^2 + 4h + 4 - h^2 = 4h + 4$$

مساحة الممر

مثال (2) جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

$$i) (x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

مربع مجموع حدين

$$ii) (x - y)^2 = (x - y)(x - y) = x^2 - xy - yx + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

مربع الفرق بين حدين

$$iii) (x + y)(x - y) = x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2$$

مجموع حدين $\times$ فرق بينهما

$$iv) (x + 3)(x + 5) = x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$$

مجموع حدين $\times$ مجموع حدين

$$v) (x + 2)(x - 6) = x^2 - 6x + 2x - 12 = x^2 - 4x - 12$$

مجموع حدين $\times$ فرق بين حدين

$$vi) (x - 1)(x - 4) = x^2 - 4x - x + 4 = x^2 - 5x + 4$$

فرق بين حدين $\times$ فرق بين حدين

مثال (3) جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:

$$i) (z + 3)^2 = z^2 + 6z + 9$$

$$ii) (h - 5)^2 = h^2 - 10h + 25$$

$$iii) (2x - 7)(2x + 7) = 4x^2 - 49$$

$$iv) (3y + 1)(y + 2) = 3y^2 + 7y + 2$$

$$v) (v + \sqrt{2})(v - \sqrt{2}) = v^2 - 2$$

$$vi) (n - \sqrt{3})(5n - \sqrt{3}) = 5n^2 - 6\sqrt{3}n + 3$$

Multiplying algebraic expression from two terms by another from three terms

تعلمت سابقاً ضرب المقادير الجبرية من عدة حدود والآن سوف تتعلم حالات خاصة من ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود وذلك باستعمال الخواص التي درستها في التوزيع والإبدال والترتيب.

مثال (4) جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

i) $(x+2)(x^2-2x+4) = x^3-2x^2+4x+2x^2-4x+8 = x^3+8 = x^3+2^3$ ناتج الضرب مجموع مكعبين

ii) $(y-3)(y^2+3y+9) = y^3+3y^2+9y-3y^2-9y-27 = y^3-27 = y^3-3^3$ ناتج الضرب الفرق بين مكعبين

iii) $(y+2)^3 = (y+2)(y+2)^2 = (y+2)(y^2+4y+4)$ مكعب مجموع حدين

$$= y^3 + 4y^2 + 4y + 2y^2 + 8y + 8 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$$

iv) $(z-3)^3 = (z-3)(z-3)^2 = (z-3)(z^2-6z+9)$ مكعب الفرق بين حدين

$$= z^3 - 6z^2 + 9z - 3z^2 + 18z - 27 = z^3 - 9z^2 + 27z - 27$$

مثال (5) جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:

i) $(2v+5)(4v^2-10v+25) = 8v^3-20v^2+50v+20v^2-50v+125 = 8v^3+125 = (2v)^3+5^3$

ii) $(\frac{1}{3}-z)(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}z+z^2) = \frac{1}{27}+\frac{1}{9}z+\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{9}z-\frac{1}{3}z^2-z^3 = \frac{1}{27}-z^3 = (\frac{1}{3})^3-z^3$

iii) $(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}) = x^3+\sqrt[3]{2}x^2+\sqrt[3]{4}x-\sqrt[3]{2}x^2-\sqrt[3]{4}x-\sqrt[3]{8}$

$$= x^3 + \sqrt[3]{2}x^2 - \sqrt[3]{2}x^2 + \sqrt[3]{4}x - \sqrt[3]{4}x - 2 = x^3 - 2$$

iv) $(x+\frac{1}{2})^3 = (x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})^2 = (x+\frac{1}{2})(x^2+x+\frac{1}{4}) = x^3+x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$

$$= x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$$

v) $(y-5)^3 = (y-5)(y-5)^2 = (y-5)(y^2-10y+25)$

$$= y^3 - 10y^2 + 25y - 5y^2 + 50y - 125$$

$$= y^3 - 15y^2 + 75y - 125$$

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

1 $(x + 3)(x - 3)$

2 $(\sqrt{7} - h)^2$

3 $(z + \sqrt{5})(z - \sqrt{5})$

4 $(v + 5)(v + 1)$

5 $(x - 3)(x - 2)$

6 $(3x - 4)(x + 5)$

7 $(\frac{1}{3}y + 3)(\frac{1}{3}y + 2)$

الأسئلة (1 - 7)

مشابهة للمثالين (2,3)

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

8 $(y+2)(y^2 - 2y+4)$

9 $(2z + 4)(4z^2 - 8z + 16)$

الأسئلة (8 - 13)

مشابهة للمثالين (4,5)

10 $(v - \sqrt[3]{3})(v^2 + \sqrt[3]{3}v + \sqrt[3]{9})$

11 $(\sqrt[3]{\frac{2}{7}} + m)(\sqrt[3]{\frac{4}{49}} - \sqrt[3]{\frac{2}{7}}m + m^2)$

12 $(x + 5)^3$

13 $(y - 4)^3$

تدرب وحل التمرينات

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

14 $(n - 6)^2$

15 $(y + 5)(y - 5)$

16 $(x + \sqrt{8})^2$

17 $(y + \sqrt{6})(y - \sqrt{6})$

18 $(8 + h)(3 + h)$

19 $(4 - y)(5 - y)$

20 $(2x - 3)(x + 9)$

21 $(z - 2\sqrt{7})(2z - \sqrt{7})$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

22 $(x+6)(x^2 - 6x+36)$

23 $(y - 1)(y^2 + y + 1)$

24 $(z - 3)^3$

25 $(\frac{2}{3} - r)(\frac{4}{9} + \frac{2}{3}r + r^2)$

26 $(x - \sqrt[3]{4})(x^2 + \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16})$

27 $(z - \sqrt{5})^3$

28 $(\sqrt[3]{\frac{1}{5}} + n)(\sqrt[3]{\frac{1}{25}} - \sqrt[3]{\frac{1}{5}}n + n^2)$

29 $(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \frac{1}{h})(\sqrt[3]{\frac{1}{81}} - \sqrt[3]{\frac{1}{9}}\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2})$



30 مسبح: يعد فندق بغداد أحد الفنادق السياحية المهمة في العاصمة العراقية بغداد، يبلغ طول المسبح فيه $(x + 9)$ أمتار وعرضه $(x + 1)$ متر، ومحاط بممر عرضه 1 متر. اكتب مساحة المسبح مع الممر بأبسط صورة بدلالة x .



31 تاريخ: تقع مدينة بابل شمال مدينة الحلة في العراق حيث عاش البابليون فيها منذ 3000 سنة قبل الميلاد تقريباً. وقد بنوا سنة 575م بوابة عشتار التي تعد البوابة الثامنة في سور مدينة بابل. رسم وائل لوحة فنية تمثل بوابة عشتار بالأبعاد $(y + 7)$ ، $(y - 4)$ سنتمترات. اكتب مساحة اللوحة التي رسمها وائل بأبسط صورة بدلالة y .



32 أسماك زينة: حوض سمك زينة مكعب الشكل طول حرفه $(v + 3)$ سنتمتر. اكتب حجم الحوض الزينة بأبسط صورة بدلالة v .

فكر

33 تحد: جد ناتج ما يأتي بأبسط صورة:

$$(x + 1)^2 - (x - 2)^2$$

34 أصح الخطأ: كتبت نسرين ناتج ضرب المقدارين الجبريين كالآتي:

$$(\sqrt{5}h - 4)(h - 6) = 5h^2 + 10h - 24$$

حدّد خطأ نسرين وصحّحه.

35 حس عددي: أيّ العددين أكبر؟ العدد $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ أم العدد $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$. وضّح إجابتك.

اكتب

ناتج ضرب المقدارين الجبريين:

$$(2z + \frac{1}{2})(2z - \frac{1}{2})$$

تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر

Factoring the Algebraic Expression by using Greater Common Factor

الدرس
12-2



تعلم

يعد نصب ساحة كهرومائية وسط بغداد من المعالم الحضارية المتميزة في العراق. يتوسط تمثال كهرومائية الساحة التي تقع في منطقة الكرادة ويبلغ نصف قطر قاعدة التمثال r متر ويحيط به حوض على شكل ممر دائري، إذا كان نصف قطر التمثال مع الحوض $r + 2$ متر، فجد مساحة الحوض.

فكرة الدرس

- تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر.
- المفردات
- تحليل المقدار الجبري
- العامل المشترك الأكبر
- ثنائية الحد
- المعكوس
- التحقق من صحة الحل

12-2-1] تحليل مقدار جبري باستعمال العامل المشترك الأكبر

Factoring the algebraic expression by using a greater common factor

تعلمت سابقاً كيفية إيجاد العامل المشترك الأكبر للأعداد وكذلك تعلمت كيفية تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF)، والآن سوف تزيد مهارتك في تعلم كيفية تحليل مقادير جبرية مكونة من حدين أو ثلاثة حدود باستعمال العامل المشترك الأكبر والتحقق من صحة الحل.

مثال (1)

نصف قطر قاعدة تمثال كهرومائية r متر، ونصف قطر قاعدة التمثال مع الحوض $r + 2$ متر، جد مساحة الحوض.

$$A_1 = r^2 \pi$$

مساحة التمثال

$$A_2 = (r + 2)^2 \pi = (r^2 + 4r + 4) \pi = r^2 \pi + 4r \pi + 4 \pi$$

مساحة التمثال مع الحوض

$$A = A_2 - A_1 = r^2 \pi + 4r \pi + 4 \pi - r^2 \pi$$

مساحة الحوض

$$= 4r \pi + 4 \pi = 4 \pi (r + 1)$$

(4π) العامل المشترك الأكبر

مساحة الحوض المحيط بالتمثال $4 \pi (r + 1)$ متر مربع

حل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:

مثال (2)

$$i) 6x^3 + 9x^2 - 18x = 3x (2x^2 + 3x - 6)$$

العامل المشترك الأكبر هو $3x$

التحقق:

$$3x (2x^2 + 3x - 6) = 3x (2x^2) + 3x (3x) - 6(3x)$$

للتحقق استعمل عملية ضرب المقادير الجبرية

$$= 6x^3 + 9x^2 - 18x$$

$$ii) \sqrt{12} y^2 z + \sqrt{2} (\sqrt{6} yz^2 - \sqrt{24} yz)$$

فتح القوس مع تبسيط الجذور العددية

$$= 2\sqrt{3} y^2 z + 2\sqrt{3} yz^2 - 4\sqrt{3} yz$$

العامل المشترك الأكبر هو $2\sqrt{3} yz$

$$= 2\sqrt{3} yz (y + z - 2)$$

التحقق:

$$2\sqrt{3} yz (y+z-2) = 2\sqrt{3} y^2 z + 2\sqrt{3} yz^2 - 4\sqrt{3} yz$$

للتحقق استعمل عملية ضرب المقادير الجبرية

نلاحظ المتغيرات متساوية في الحدود مع المقدار الأصلي وكذلك المعاملات العددية لأن:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{12}, 2\sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{6}, 4\sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{24}$$

مثال (3) حل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

- i) $5x(x+3) - 7(x+3) = (x+3)(5x-7)$ العامل المشترك الأكبر هو $(x+3)$
 ii) $\frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{3}y^2(y-1) = (y-1)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}y^2)$ العامل المشترك الأكبر هو $(y-1)$
 iii) $\sqrt{3}v^2(z+2) - \sqrt{5}v(z+2) = (z+2)(\sqrt{3}v^2 - \sqrt{5}v)$ العامل المشترك الأكبر هو $(z+2)$
 $= v(z+2)(\sqrt{3}v - \sqrt{5})$

[2-2-2] تحليل مقدار جبري باستعمال التجميع

Factoring algebraic expression by grouping

تعلمت في الفقرة السابقة كيفية تحليل المقدار الجبري المكون من حدين أو ثلاثة حدود باستعمال العامل المشترك الأكبر، والآن سوف نتعلم كيفية تحليل مقدار جبري مكون من أربعة حدود أو أكثر باستعمال تجميع الحدود بحيث يوجد للحدود التي يمكن تجميعها عوامل مشتركة.

مثال (4) حل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

- i) $4x^3 - 8x^2 + 5x - 10 = (4x^3 - 8x^2) + (5x - 10)$ تجميع الحدود التي لها عوامل مشتركة
 $= 4x^2(x-2) + 5(x-2)$ تحليل الحدود المجمعة
 $= (x-2)(4x^2 + 5)$ العامل المشترك الأكبر هو $(x-2)$

التحقق:

$$(x-2)(4x^2 + 5) = x(4x^2 + 5) - 2(4x^2 + 5)$$
 استعمال خاصية التوزيع
 $= 4x^3 + 5x - 8x^2 - 10 = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10$ استعمال الضرب والترتيب

- ii) $\sqrt{2}h^2t + \sqrt{3}t^2v - \sqrt{8}h^2v - \sqrt{12}v^2t = (\sqrt{2}h^2t - \sqrt{8}h^2v) + (\sqrt{3}t^2v - \sqrt{12}v^2t)$ تجميع الحدود
 $= \sqrt{2}h^2(t-2v) + \sqrt{3}tv(t-2v)$ تحليل الحدود المجمعة
 $= (t-2v)(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv)$ العامل المشترك الأكبر هو $(t-2v)$

التحقق:

$$(t-2v)(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv) = t(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv) - 2v(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv)$$
 استعمال خاصية التوزيع
 $= \sqrt{2}h^2t + \sqrt{3}t^2v - \sqrt{8}h^2v - \sqrt{12}v^2t$ استعمال الضرب والترتيب

مثال (5) حل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

- $14x^3 - 7x^2 + 3 - 6x = (14x^3 - 7x^2) + (3 - 6x)$ تجميع الحدود
 $= 7x^2(2x-1) + 3(1-2x)$ تحليل الحدود المجمعة
 $= 7x^2(2x-1) + 3(-1)(2x-1)$ استعمال المعكوس
 $= 7x^2(2x-1) - 3(2x-1)$ كتابة $(-1)+3$ على شكل -3
 $= (2x-1)(7x^2-3)$ العامل المشترك الأكبر هو $(2x-1)$

حل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:

1 $9x^2 - 21x$

2 $10 - 15y + 5y^2$

الأسئلة (1 - 4)

3 $14z^4 - 21z^2 - 7z^3$

4 $\sqrt{8} t^2 r + \sqrt{2} (tr^2 - \sqrt{3} tr)$

مشابهة للمثال (2)

حل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

5 $3y(y - 4) - 5(y - 4)$

6 $\frac{1}{4}(t + 5) + \frac{1}{3}t^2(t + 5)$

الأسئلة (5 - 8)

7 $\sqrt{2}n(x + 1) - \sqrt{3}m(x + 1)$

8 $2x(x^2 - 3) + 7(x^2 - 3)$

مشابهة للمثال (3)

حل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

9 $3y^3 - 6y^2 + 7y - 14$

10 $21 - 3x + 35x^2 - 5x^3$

الأسئلة (9 - 12)

11 $2r^2k + 3k^2v - 4r^2v - 6v^2k$

12 $3z^3 - \sqrt{18}z^2 + z - \sqrt{2}$

مشابهة للمثال (4)

حل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

13 $21y^3 - 7y^2 + 3 - 9y$

14 $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 5 - 10x$

الأسئلة (13 - 16)

15 $6z^3 - 9z^2 + 12 - 8z$

16 $5t^3 - 15t^2 - 2t + 6$

مشابهة للمثال (5)

تدرب وحلّ التمرينات

حل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:

17 $12y^3 - 21y^2$

18 $5t^3 + 10t^2 - 15t$

19 $6v^2(3v - 6) + 18v$

20 $\sqrt{12}n^3r + \sqrt{3}(nr^3 - \sqrt{2}nr)$

حل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

21 $\frac{1}{7}(y + 1) + \frac{1}{3}y^2(y + 1)$

22 $\sqrt{3}k(x^2 + 1) - \sqrt{5}v(x^2 + 1)$

حل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

23 $5x^3 - 10x^2 + 10x - 20$

24 $49 - 7z + 35z^2 - 5z^3$

25 $3t^3k + 9k^2s - 6t^3s - 18s^2k$

26 $2y^4 - \sqrt{12}y^3 + \sqrt{2}y - \sqrt{6}$

حل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

27 $12x^3 - 4x^2 + 3 - 9x$

28 $4r^3 - 16r^2 - 3r + 12$



29 **الطاقة الشمسية:** الألواح الشمسية هي المكون الرئيس في أنظمة الطاقة الشمسية التي تقوم بتوليد الكهرباء، وتصنع الخلايا من مواد شبه موصلة مثل السيليكون تمتص الضوء من الشمس. ما أبعاد اللوح الشمسي بدلالة x ، إذا كانت المساحة $3x(x - 4) - 22(x - 4)$ أمتار مربعة؟



30 **طائر الفلامنكو:** طائر الفلامنكو، من جنس النحاميات وهو من الطيور المهاجرة التي تمتاز بشكلها الجميل ولونها الوردية، وتقطع مسافات بعيدة في أثناء موسم الهجرة السنوي مروراً بمنطقة الأهوار جنوب العراق لتحصل على الغذاء من المسطحات المائية. إذا كانت مساحة المسطح المائي الذي غطته طيور الفلامنكو في أحد الأهوار $4y^2 + 14y + 7(2y + 7)$ أمتار مربعة. فما شكل المسطح وما أبعاده بدلالة y ؟



31 **ساعة بغداد:** ساعة بغداد هي مبنى مرتفع تعلوه ساعة معلقة على برج لها أربعة أوجه، يقع المبنى ضمن منطقة ساحة الاحتفالات في بغداد وأنشئت في سنة 1994م. ما نصف قطر الدائرة الداخلية للساعة بدلالة z إذا علمت أن مساحتها $z^2\pi - 3z\pi - \pi(3z - 9)$ ؟

فكر

32 **تحذ:** حلل المقدار الآتي إلى أبسط صورة:

$$5x^5y + 7y^3z - 10x^5z - 14z^2y^2$$

33 **أصح الخطأ:** كتبت ابتسام ناتج تحليل المقدار التالي كما يأتي:

$$\sqrt{2}t^4 - \sqrt{24}t^3 + t^2 - \sqrt{12}t = (t + 2\sqrt{3})(\sqrt{2}t^2 - t)$$

اكتشف خطأ ابتسام وصححه.

34 **حس عددي:** ما العدد المجهول في المقدار $x^2 + 3x + 5x + 15 = (x + 3)(x + \boxed{})$

أكتب

ناتج طرح المقدار $(x - y)(x + y)$ من المقدار $(x + y)(x + y)$ بأبسط صورة.

الدرس 12-3

تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات

Factoring the Algebraic Expression by using Special Identities

تعلم



يعد ملعب الشعب الدولي في العاصمة العراقية بغداد من الملاعب المهمة في العراق إذ أنشئ عام 1966. إذا كانت مساحة الساحة المخصصة لكرة القدم التي تتوسط أرضيته يمثلها المقدار $x^2 - 400$ متر مربع، فما أبعاد الساحة؟

فكرة الدرس

• تحليل المقدار الجبري
• كفرق بين مربعين
• ومربع الكامل.

المفردات

• فرق بين مربعين
• مربع كامل
• الحد العام
• إكمال المربع
• الحد المفقود

12-3-1] تحليل المقدار الجبري بالفرق بين مربعين

Factoring the algebraic expression by difference of two squares

تعرفت سابقاً كيفية إيجاد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر الأول يمثل مجموع حدين والآخر يمثل الفرق بينهما والناتج يمثل الفرق بين مربعيهما، والآن سوف تتعلم العملية العكسية لعملية الضرب وهي تحليل المقدار الجبري الذي على صورة فرق بين مربعين $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$.

المقدار $x^2 + y^2$ لا يتحلل في هذه المرحلة.

مثال (1)

جد أبعاد ساحة كرة القدم التي مساحتها $x^2 - 400$ متر مربع.

$$\begin{aligned} x^2 - 400 &= (x)^2 - (20)^2 \\ &= (x + 20)(x - 20) \end{aligned}$$

اكتب كل حد على هيئة مربع كامل

اكتب التحليل

القوس الأول: الجذر التربيعي للحد الأول + الجذر التربيعي للحد الثاني

القوس الثاني: الجذر التربيعي للحد الأول - الجذر التربيعي للحد الثاني

لذا طول ساحة كرة القدم $x + 20$ متراً وعرضها $x - 20$ متراً

مثال (2)

حلل كل مقدار من المقادير التالية كفرق بين مربعين:

i) $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

ii) $36y^2 - z^2 = (6y + z)(6y - z)$

iii) $49 - v^2 = (7 + v)(7 - v)$

iv) $2x^2 - z^2 = (\sqrt{2}x + z)(\sqrt{2}x - z)$

v) $5h^2 - 7v^2 = (\sqrt{5}h + \sqrt{7}v)(\sqrt{5}h - \sqrt{7}v)$

vi) $12 - t^2 = (2\sqrt{3} + t)(2\sqrt{3} - t)$

vii) $8x^3y - 2xy^3 = 2xy(4x^2 - y^2)$

التحليل باستعمال العامل المشترك

$$= 2xy(2x + y)(2x - y)$$

التحليل باستعمال الفرق بين المربعين

viii) $\frac{1}{16}z^4 - \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{3}\right)$

Factoring the algebraic expression by perfect square

تعلمت سابقاً كيفية إيجاد ناتج ضرب مربع مجموع حدين ومربع الفرق بين حدين وكان الناتج مؤلفاً من ثلاثة حدود، والآن سوف نتعلم العملية العكسية للضرب وهي تحليل مقدار مؤلف من ثلاثة حدود على صورة مربع كامل

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2, \quad x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

يكون المقدار الجبري $ax^2 \pm bx + c$ مربعاً كاملاً، إذا كان: $(c) \quad bx = \pm 2\sqrt{(ax^2)}$ حيث $a \neq 0$

مثال (3) حل كل مقدار من المقادير التالية التي على صورة مربع كامل:

i) $x^2 + 6x + 9 = (x)^2 + 2(x \times 3) + (3)^2$

اكتب الحد الأول والحد الأخير على هيئة مربع كامل

اكتب الحد الأوسط على هيئة ضعف جذر الحد الأول في جذر الحد الأخير

$$= (x + 3)(x + 3)$$

اكتب تحليل المقدار

$$= (x + 3)^2$$

التحليل النهائي على هيئة $(\text{جذر الحد الأخير} + \text{جذر الحد الأول})^2$

ii) $y^2 - 4y + 4 = (y)^2 - 2(y \times 2) + (2)^2$

$$= (y - 2)^2$$

لاحظ الإشارة بين العددين هي إشارة الحد الأوسط

iii) $16z^2 - 8z + 1 = (4z)^2 - 2(4z \times 1) + (1)^2 = (4z - 1)^2$

مثال (4) حدد أيّ مقدار من المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلّله:

i) $x^2 + 10x + 25$

$$(x)^2 \quad | \quad (5)^2$$

$$2(x)(5) = 10x \quad \text{مربع كامل}$$

$$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$$

ii) $y^2 + 14y + 36$

$$(y)^2 \quad | \quad (6)^2$$

$$2(y)(6) = 12y \neq 14y \quad \text{ليست مربعاً كاملاً}$$

iii) $4 - 37v + 9v^2$

$$(2)^2 \quad | \quad (3v)^2$$

$$-2(2)(3v) = -12v \neq -37v$$

ليست مربعاً كاملاً

iv) $9h^2 - 6h + 3$

$$(3h)^2 \quad | \quad (\sqrt{3})^2$$

$$-2(3h)(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}h \neq -6h$$

ليست مربعاً كاملاً

مثال (5) اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحلّله:

i) $25x^2 - \dots + 49$

لتصبح مربعاً كاملاً نطبق قانون الحد الأوسط $(c) \quad bx = \pm 2\sqrt{(ax^2)}$

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)} \quad (c) \Rightarrow bx = 2\sqrt{(25x^2)(49)} \Rightarrow bx = 70x$$

$$\Rightarrow 25x^2 - 70x + 49 = (5x - 7)^2$$

ii) $\dots + 8x + 16$

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)} \quad (c) \Rightarrow 8x = 2\sqrt{(ax^2)(16)} \Rightarrow 64x^2 = 4 \times 16 \times ax^2 \Rightarrow ax^2 = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

iii) $y^2 + 14y + \dots$

$$by = 2\sqrt{(ay^2)} \quad (c) \Rightarrow 14y = 2\sqrt{(y^2)(c)} \Rightarrow 196y^2 = 4 \times y^2 \times c \Rightarrow c = 49$$

$$\Rightarrow y^2 + 14y + 49 = (y + 7)^2$$

تأكّد من فهمك

حل كل مقدار من المقادير التالية كفرق بين مربعين:

الأسئلة (1 - 6)

مشابهة للمثال (2)

1 $x^2 - 16$

2 $36 - 4x^2$

3 $h^2 - v^2$

4 $9m^2 - 4n^2$

5 $27x^3z - 3xz^3$

6 $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{16}$

حل كل مقدار من المقادير التالية كمربع كامل:

الأسئلة (7 - 10)

مشابهة للمثال (3)

7 $y^2 - 8y + 16$

8 $9z^2 - 6z + 1$

9 $v^2 + 2\sqrt{3}v + 3$

10 $4h^2 - 20h + 25$

حدّد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلّه:

الأسئلة (11 - 14)

مشابهة للمثال (4)

11 $x^2 + 18x + 81$

12 $16 - 14v + v^2$

13 $64h^2 - 48h - 9$

14 $3 - 4\sqrt{3}t + 4t^2$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحلّه:

الأسئلة (15 - 18)

مشابهة للمثال (5)

15 $.... + 14y + 49$

16 $z^2 + 4z +$

17 $3 - + 9x^2$

18 $4x^2 + 2\sqrt{5}x + ...$

تدرب وحلّ التمرينات

حلّ كل مقدار من المقادير الآتية إلى أبسط صورة:

19 $25 - 4x^2$

20 $y^2 - 121$

21 $x^2 - 16z^2$

22 $12 - 3t^2$

23 $8y^3x - 2x^3y$

24 $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{8}$

25 $\frac{1}{3}z^5 - \frac{1}{12}z$

26 $4x^2 + 20x + 25$

27 $3z^2 - 6z + 3$

28 $16n^2 + 8\sqrt{3}n + 3$

29 $4t^3 - 12t^2 + 9t$

30 $1 - 4m + 4m^2$

حدّد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلّه:

31 $4x^2 + 18x + 16$

32 $y^2 + 10y + 25$

33 $49 - 7v + v^2$

34 $2h^2 - 12h - 18$

35 $4v^2 + 4v + 4$

36 $3 - 2\sqrt{3}z + z^2$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحلّه:

37 $y^2 + + 36$

38 $25 - 20x +$

39 $4v^2 + 8v +$

40 $5 - + 16x^2$

41 $81 + 18z +$

42 $9h^2 + 6\sqrt{2}h + ...$



43 **المئذنة الملوية:** وتقع منارة المئذنة الملوية في مدينة سامراء العراقية، وتعد إحدى معالم العراق المميزة بسبب شكلها الفريد، فهي إحدى آثار العراق القديمة المشهورة التي تعود لعصر حكم الدولة العباسية، وترتكز على قاعدة مربعة مساحتها $x^2 - 8x + 16$ متراً مربعاً. ما طول ضلع القاعدة التي تستند عليها الملوية بدلالة x ؟



44 **مزرعة أبقار:** لدى سعد مزرعة أبقار مربعة الشكل طول ضلعها x متر، وسّعها لتصبح مستطيلة الشكل فأصبحت مساحة المزرعة $x^2 - 81$ متراً مربعاً، ما طول المزرعة وعرضها بعد التوسعة بدلالة x ؟



45 **لوحة فنية:** رسم بشار لوحة فنية تمثل منطقة الأهوار في جنوب العراق، فكان المقدار $4x^2 - 8x + 9$ سنتمترات مربعة يمثل مساحة اللوحة الفنية. أيُمثل مقدار مساحة اللوحة الفنية مربعاً كاملاً أم لا ؟

فكر

46 **تحذ:** هل المقدار الآتي يمثل مربعاً كاملاً أم لا؟ معللاً إجابتك.

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{16}$$

47 **أصح الخطأ:** قالت منتهى إن المقدار $(2x+1)(2x-1)$ هو تحليل للمربع الكامل $4x^2 - 4x + 1$. حدّد خطأ منتهى وصحّحه.

48 **حسن عددي:** أيُمثل المقدار $9x^2 + 12x - 4$ مربعاً كاملاً أم لا ؟ وضّح إجابتك.

أكتب

تحليل للمقدار $4x^2 - 8x + 4$.

تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

Factoring the Algebraic Expression of three terms by Probe and Error

الدرس 12-4



تعلم

الثور المجنح الآشوري (شيدو لاماسو) هكذا يرد اسمه في الكتابات الآشورية، وأصل كلمة لاماسو هو من لامو و Lammu السومرية ويوجد تمثال له في متحف مدينة الموصل. ما أبعاد اللوحة الفنية للثور المجنح التي مساحتها $x^2 + 10x + 21$ سنتمراً مربعاً؟

فكرة الدرس

- تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود باستعمال التجربة

المفردات

- الوسطان
- الطرفان
- الحد الأوسط

12-4-1] تحليل المقدار الجبري x^2+bx+c

Factoring the algebraic expression x^2+bx+c

تعرفت سابقاً كيفية إيجاد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر كل منهما مكوّن من حدين:

i) $(x+2)(x+3) = x^2+5x+6$, ii) $(x+3)(x-5) = x^2-2x-15$, iii) $(x-1)(x-4) = x^2-5x+4$

والآن سوف تتعلم العملية العكسية لعملية الضرب وهي تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود x^2+bx+c باستعمال التجربة. ولتحليل المقدار الجبري، نجد عددين حقيقيين n, m بحيث $n + m = b$ ، $nm = c$ ونكتب

$$x^2 + bx + c = (x + n)(x + m)$$

مثال (1) ما أبعاد اللوحة الفنية للثور المجنح التي مساحتها $x^2 + 10x + 21$ سنتمراً مربعاً؟
لتحليل المقدار الجبري نتبع الخطوات الآتية:

$$\begin{array}{r} + 7x \text{ حاصل ضرب الطرفين} \\ + 3x \text{ حاصل ضرب الوسطين} \\ \hline + 10x \text{ الحد الأوسط} \end{array} \text{ بالجمع}$$

$$x^2 + 10x + 21 = (x + 3)(x + 7)$$

الطرفين
الوسطين

عوامل العدد 21	مجموع العاملين
(1) (21)	$1 + 21 = 22$
(3) (7)	$3 + 7 = 10$
(-3) (-7)	$(-3) + (-7) = -10$

عرض اللوحة الفنية هو $x+3$ سنتمتر

طول اللوحة الفنية هو $x+7$ سنتمتر

ملاحظة: أهملت عوامل العدد $21 = (-3)(-7)$ لأن إشارة الحد الوسط موجبة.

حلل المقدار الجبري: $y^2 + y - 12$

مثال (2)

$$\begin{array}{r} + 4y \text{ حاصل ضرب الطرفين} \\ - 3x \text{ حاصل ضرب الوسطين} \\ \hline + y \text{ الحد الأوسط} \end{array} \text{ بالجمع}$$

$$y^2 + y - 12 = (y - 3)(y + 4)$$

عوامل العدد -12	مجموع العاملين
(1) (-12)	$1 - 12 = -11$
(12) (-1)	$12 - 1 = 11$
(2) (-6)	$2 - 6 = -4$
(6) (-2)	$6 - 2 = 4$
(3) (-4)	$3 - 4 = -1$
(4) (-3)	$4 - 3 = 1$

مثال (3) حلل المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

i) $z^2 - z - 6 = (z - 3)(z + 2)$

الحد الأوسط $2z - 3z = -z$

ii) $x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6)$

الحد الأوسط $-6x - 3x = -9x$

iii) $y^2 + 6y - 27 = (y + 9)(y - 3)$

الحد الأوسط $-3y + 9y = +6y$

iv) $x^2 - xy - 20y^2 = (x - 5y)(x + 4y)$

الحد الأوسط $+4xy - 5xy = -xy$

v) $15 - 8z + z^2 = (5 - z)(3 - z)$

الحد الأوسط $-5z - 3z = -8z$

[2-4-2] تحليل المقدار الجبري ax^2+bx+c وإن $a \neq 0$

Factoring the algebraic expression ax^2+bx+c and $a \neq 0$

الآن سوف نتعرف إلى كيفية تحليل مقدار جبري من ثلاثة حدود على الصورة ax^2+bx+c وإن $a \neq 0$

مثال (4) حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

i) $6x^2 + 17x + 7$

$6 = \begin{cases} (1)(6) \\ (2)(3) \end{cases}, 7 = (1)(7)$

نجد عوامل العددين 6 ، 7 وكما يأتي:

$(1)(6) \quad (1)(7) \Rightarrow (1)(1) + (6)(7) = 43$

$(1)(7) + (6)(1) = 13$

$(2)(3) \quad (1)(7) \Rightarrow (2)(1) + (3)(7) = 23$

$(2)(7) + (3)(1) = 17$

حاصل ضرب الطرفين $+14y$

حاصل ضرب الوسطين $+3x$

الحد الأوسط $+17x$

$6x^2 + 17x + 7 = (2x + 1)(3x + 7)$

ii) $7y^2 - 26y - 8$

$8 = \begin{cases} (1)(8) \\ (2)(4) \end{cases}, 7 = (1)(7)$

نجد عوامل العددين 8 ، 7 وكما يأتي:

$(1)(1) - (8)(7) = -55$

$(1)(7) - (8)(1) = -1$

$(2)(1) - (4)(7) = -26$

$(2)(7) - (4)(1) = 10$

$7y^2 - 26y - 8 = (7y + 2)(y - 4)$

حاصل ضرب الطرفين $-28y$

حاصل ضرب الوسطين $+2y$

الحد الأوسط $-26y$

مثال (5) حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

i) $3z^2 - 17z + 10 = (3z - 2)(z - 5)$

الحد الأوسط $-15z - 2z = -17z$

ii) $4v^2 - v - 3 = (4v + 3)(v - 1)$

الحد الأوسط $-4v + 3v = -v$

iii) $15 + 11h + 2h^2 = (5 + 2h)(3 + h)$

الحد الأوسط $+5h + 6h = 11h$

iv) $6x^2 - 51x + 63 = 3(2x^2 - 17x + 21) = 3(x - 7)(2x - 3)$

الحد الأوسط $-3x - 14x = -17x$

v) $3x^2 - 10xy + 3y^2 = (3x - y)(x - 3y)$

الحد الأوسط $-9xy - xy = -10xy$

تأكّد من فهمك

حل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

1 $x^2 + 6x + 8$

2 $1 - 2z + z^2$

3 $x^2 - 13x + 12$

الأسئلة (1 - 6)

4 $3 + 2z - z^2$

5 $x^2 - 2x - 3$

6 $15 - 8z + z^2$

مشابهة للأمثلة (1،3)

حل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

7 $2x^2 + 5x + 3$

8 $3y^2 - 14y + 8$

9 $3x^2 - 10x + 8$

الأسئلة (7 - 14)

10 $8 - 25z + 3z^2$

11 $5y^2 - y - 6$

12 $6 + 29z - 5z^2$

مشابهة للمثالين (4،5)

13 $x^2 - 9xy + 20y^2$

14 $3y^2 - 19yx - 14x^2$

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

15 $x^2 + 9x + 20 = (x \dots 4) (x \dots 5)$

16 $y^2 - 12y + 20 = (y \dots 2) (y \dots 10)$

الأسئلة (15 - 18)

17 $6x^2 - 7x + 2 = (2x \dots 1) (3x \dots 2)$

18 $20 - 7y - 3y^2 = (5 \dots 3y) (4 \dots y)$

مشابهة للأمثلة (1،5)

تدرب وحلّ التمرينات

حل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

19 $x^2 + 9x + 14$

20 $y^2 - 5y + 6$

21 $24 - 2z - z^2$

22 $3 + 2z - z^2$

23 $x^2 - 2x - 3$

24 $36 - 15z + z^2$

حل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

25 $2x^2 + 12x - 14$

26 $4y^2 - 6y + 2$

27 $10 + 9z - 9z^2$

28 $2x^2 + 3x + 1$

29 $13y^2 - 11y - 2$

30 $50 - 20z + 2z^2$

31 $30x^2 - xy - y^2$

32 $16y^2 - 2yx - 3x^2$

33 $6z^2 - 2zx - 4x^2$

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

34 $x^2 + x - 20 = (x \dots 4) (x \dots 5)$

35 $x^2 - x - 56 = (x \dots 7) (x \dots 8)$

36 $35 + 3y - 2y^2 = (5 \dots y) (7 \dots 2y)$

37 $3x^2 - 5x + 2 = (x \dots 1) (3x \dots 2)$



38 **قلعة الأخيضر:** قلعة الأخيضر هي قلعة أثرية تقع في محافظة كربلاء وسط العراق ولا تزال أطلال القلعة قائمة إلى يومنا هذا، الأخيضر من الحصون الدفاعية الفريدة من نوعها ويحيط به سور عظيم مستطيل الشكل. ما أبعاد السور الخارجية بدلالة x ، إذا كانت مساحة القلعة مع السور يمثلها المقدار $6x^2 - 39x + 60$ متراً مربعاً؟



39 **ألعاب ترفيهية:** تعد أرجوحة ديسكفري من الألعاب الخطرة في مدينة الألعاب، ويمثل المقدار $5t^2 + 5t - 30$ مسار أرجوحة ديسكفري في مدينة الألعاب، إذ يمثل t زمن الحركة. وتحليل المقدار يساعد على معرفة الوقت الذي تستغرقه أرجوحتها في المرة الأولى. حلّ المقدار.



40 **مترو الأنفاق:** يعد مترو الأنفاق نظام سكك حديد تحت الأرض تسير عليه القطارات، وهو أحد وسائل النقل السريعة في المدن الكبيرة وذات الكثافة السكانية العالية، ويتألف كل قطار من عدة عربات، فإذا كان المقدار $14y^2 - 23y + 3$ يمثل مساحة أرضية العربات بالمتر المربع، فما أبعادها بدلالة y ؟

فكر

41 **تحذّر:** حلّ المقدار الجبري الآتي إلى أبسط صورة:

$$4x^3 + 4x^2 - 9x - 9$$

42 **أصحّ الخطأ:** حلّ سعد المقدار $6z^2 - 16z - 6$ كما يأتي:

$$6z^2 - 16z - 6 = (3z - 1)(2z + 6)$$

اكتشف خطأ سعد وصحّحه.

43 **حسّ عدديّ:** أيّمكن تحديد ما إذا كانت إشارات القوسين في تحليل المقدار $x^2 - 12x + 35$ مختلفة أم متشابهة ومن دون تحليل المقدار؟ وضّح إجابتك.

أكتب

الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

$$6z^2 + 5z - 56 = (3z \dots 8)(2z \dots 7)$$

تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو الفرق بين مكعبين

Factoring the Algebraic Expression sum of two cubes or difference between two cubes

الدرس
[2-5]



تعلم

مكعب روبيك هو لغز ميكانيكي ثلاثي الأبعاد اخترعه النحات وأستاذ العمارة المجرى إرنو روبيك عام 1974. ما مجموع حجمي مكعبي روبك الأول طول حرفه 3dcm والثاني طول حرفه 4dcm ؟

فكرة الدرس

• تحليل المقدار الجبري من حدين الذي على صورة مجموع (فرق بين) مكعبين.

المفردات

• مجموع مكعبين
• فرق بين مكعبين

[2-5-1] تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين

Factoring the algebraic expression sum of two cubes

تعلمت في الدرس الأول من هذا الفصل ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود وناتج ضربهما مقدار على صورة مجموع مكعبين مثل: $(x^3 + 8 = x^3 + 2^3) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ ، والآن سوف تتعلم العملية العكسية وهي تحليل المقدار الجبري المؤلف من حدين والذي على صورة مجموع مكعبين: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ حيث $x = \sqrt[3]{x^3}$ ، $y = \sqrt[3]{y^3}$

مثال (1)

من تعلم، ما مجموع حجمي مكعبي روبك الأول طول حرفه 3 dcm والثاني طول حرفه 4 dcm ؟

$$v_1 + v_2 = 3^3 + 4^3$$

$$= (3 + 4)(3^2 - 3 \times 4 + 4^2)$$

$$= 7(9 - 12 + 16) = 7 \times 13 = 91 \text{dcm}^3$$

حجم المكعب = الطول × العرض × الارتفاع = (طول الحرف)³

قانون تحليل مجموع مكعبين

مثال (2)

حل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

$$\text{i) } x^3 + 5^3 = (x + 5)(x^2 - 5x + 5^2) = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$$

$$\text{ii) } y^3 + 8 = y^3 + 2^3 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$$

$$\text{iii) } 8z^3 + 27 = 2^3z^3 + 3^3 = (2z)^3 + 3^3 = (2z + 3)(4z^2 - 6z + 9)$$

$$\text{iv) } \frac{1}{a^3} + \frac{1}{64} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{4^3} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a} + \frac{1}{16}\right)$$

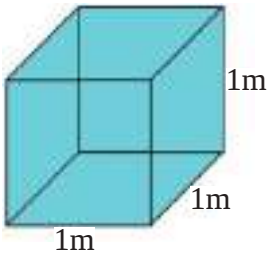
$$\text{v) } \frac{27}{x^3} + \frac{8}{125} = \frac{3^3}{x^3} + \frac{2^3}{5^3} = \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{9}{x^2} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{25}\right)$$

$$\text{vi) } \frac{1}{2}t^3 + 4 = \frac{1}{2}(t^3 + 8) = \frac{1}{2}(t^3 + 2^3) = \frac{1}{2}(t + 2)(t^2 - 2t + 4)$$

$$\text{vii) } 0.008 + v^3 = (0.2)^3 + v^3 = (0.2 + v)(0.04 - 0.2v + v^2)$$

Factoring the algebraic expression difference between two cubes

تعلمت في الدرس الأول من هذا الفصل ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود وناتج ضربهما مقدار على صورة فرق بين مكعبين مثل: $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ ، والآن سوف نتعلم العملية العكسية وهي تحليل المقدار الجبري المؤلف من حدين والذي على صورة فرق بين مكعبين:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \quad \text{حيث} \quad x = \sqrt[3]{x^3}, \quad y = \sqrt[3]{y^3}$$


مثال (3) حوض مكعب الشكل طول حرفه 1m مملوء بالماء، أُفرغ الماء منه

في حوض آخر أكبر منه مكعب الشكل طول حرفه 1.1m .

ما كمية الماء الإضافية التي نحتاج إليها ليمتلئ الحوض الكبير؟

كمية الماء الإضافية اللازمة = حجم المكعب الكبير - حجم المكعب الصغير

$$v_2 - v_1 = (1.1)^3 - 1^3$$

$$= (1.1 - 1) ((1.1)^2 + 1.1 \times 1 + 1^2) \quad \text{قانون تحليل الفرق بين مكعبين}$$

$$= 0.1 (1.21 + 1.1 + 1) = 0.1 \times 3.31 = 0.331 \text{ m}^3$$

مثال (4) حل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

i) $x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3^2) = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

ii) $y^3 - 64 = y^3 - 4^3 = (y - 4)(y^2 + 4y + 16)$

iii) $27z^3 - 8 = 3^3z^3 - 2^3 = (3z)^3 - 2^3 = (3z - 2)(9z^2 + 6z + 4)$

iv) $\frac{1}{b^3} - \frac{1}{125} = \frac{1}{b^3} - \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{5b} + \frac{1}{25}\right)$

v) $\frac{1}{3}t^3 - 9 = \frac{1}{3}(t^3 - 27) = \frac{1}{3}(t^3 - 3^3) = \frac{1}{3}(t - 3)(t^2 + 3t + 9)$

vi) $0.216 - n^3 = (0.6)^3 - n^3 = (0.6 - n)(0.36 + 0.6n + n^2)$

vii) $1 - 0.125z^3 = 1 - (0.5)^3z^3 = (1 - 0.5z)(1 + 0.5z + 0.25z^2)$

viii) $32 - \frac{1}{2}m^3 = \frac{1}{2}(64 - m^3) = \frac{1}{2}(4^3 - m^3) = \frac{1}{2}(4 - m)(16 + 4m + m^2)$

حل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

1 $y^3 + 216$

3 $125 + 8z^3$

5 $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{64}$

7 $0.125 + v^3$

2 $x^3 + z^3$

4 $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{8}$

6 $\frac{1}{3}t^3 + 9$

8 $1 + 0.008z^3$

الأسئلة (1 - 8)

مشابهة للمثالين (1،2)

حل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

9 $a^3 - 8^3$

11 $\frac{1}{c^3} - \frac{1}{8}$

13 $0.125 - m^3$

15 $3b^3 - 81$

10 $8y^3 - 64$

12 $\frac{1}{2}v^3 - 4$

14 $25 - \frac{1}{5}n^3$

16 $0.216v^3 - 0.008t^3$

الأسئلة (9 - 16)

مشابهة للمثالين (3،4)

تدرب وحل التمرينات

حل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

17 $6^3 + x^3$

19 $125y^3 + 1$

21 $\frac{1}{b^3} + \frac{1}{8}$

23 $0.027 + 27n^3$

18 $27 + 64x^3$

20 $\frac{1}{64} + \frac{8}{125}y^3$

22 $\frac{1}{5}v^3 + 25$

24 $0.125x^3 + 0.008y^3$

حل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

25 $y^3 - 64$

27 $\frac{1}{x^3} - \frac{27}{8}$

29 $0.001 - v^3$

31 $25c^3 - \frac{1}{5}$

26 $27y^3 - 8$

28 $9 - \frac{1}{3}n^3$

30 $4 - \frac{1}{2}t^3$

32 $0.001x^3 - 0.008y^3$



- 33 **مكتبة:** مكتبة مدينة شتوتغارت هي واحدة من أجمل المكتبات في العالم وأفخمها وتقع في ألمانيا، كما أنها من أكثر المكتبات تماشياً مع متطلبات التعليم الحديثة. بناية المكتبة على شكل مكعب طول حرفه $13\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^3$ متر. حلّ المقدار الذي يمثل طول حرفه.



- 34 **حوض سمك:** حوض سمك الزينة حجمه $25x^3$ متراً مكعباً، وُضِعَ في داخله حجر مكعب الشكل حجمه $\frac{1}{5}$ متر مكعب، مُلِئَ بالماء كاملاً. اكتب المقدار الذي يمثل حجم الماء ثم حلّله؟



- 35 **سكن:** بدأت المنازل تأخذ أشكالاً مختلفة في التصميم مع تطور هندسة العمارة فصُمِّمَت هذه المنازل على شكل مكعبات. فإذا كان حجم المنزل الأول $\frac{8}{a^3}$ متر مكعب، وحجم المنزل الثاني $\frac{27}{b^3}$ متر مكعب. اكتب حجم المنزلين معاً ثم حلّ المقدار.

فَكِّرْ

- 36 **تحذّر:** حل المقدار الجبري الآتي إلى أبسط صورة:

$$0.002z^3 - 0.016y^3$$

- 37 **أصحّ الخطأ:** حلّلت بشرى المقدار $8v^3 - 0.001$ كما يأتي:

$$8v^3 - 0.001 = (2v + 0.1)(4v^2 - 0.4v + 0.01)$$

اكتشف خطأ بشرى وصحّحه.

- 38 **حسّ عدديّ:** هل يمكن جمع العددين 27 ، 8 بطريقة تحليل مجموع مكعبين؟ وضّح إجابتك.

أَكْتُبْ

الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

$$125 - x^3 = (5 \dots x)(25 \dots 5x \dots x^2)$$



تعلم

اشترى حسن مجموعة من باقات الزهور بمبلغ $x^2 - x - 6$ دينار، فكانت كلفة باقة الزهور الواحدة عليه $2x - 6$ دينار. اكتب نسبة ثمن الباقة الواحدة إلى الثمن الكلي لباقات الزهور وبأبسط صورة.

فكرة الدرس

- ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها وكتابتها بأبسط صورة.
- جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها وكتابتها بأبسط صورة.

المفردات

- النسبة ، الكسر

12-6-1] تبسيط ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها

Simplifying multiplying and dividing rational algebraic expressions

تعرفت سابقاً إلى خواص الأعداد النسبية والحقيقية وتعلمت كيفية تبسيط الجمل العددية باستعمال المضاعف المشترك الأصغر وترتيب العمليات، والآن سوف نتعلم كيفية تبسيط المقادير الجبرية النسبية (الكسرية) وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على عامل مشترك، وتكرار الأمر بحيث لا يبقى مجال لذلك، وعندئذ نقول إن المقدار على أبسط صورة (simplest form).

مثال (1)

اكتب نسبة ثمن باقة الزهور الواحدة إلى الثمن الكلي لباقات بأبسط صورة.

$$\frac{\text{ثمن باقة الزهور}}{\text{ثمن الباقات الكلية للزهور}} = \frac{2x - 6}{x^2 - x - 6} = \frac{2(x - 3)}{(x - 3)(x + 2)}$$

$$= \frac{2\cancel{(x - 3)}}{\cancel{(x - 3)}(x + 2)} = \frac{2}{x + 2}$$

حلل البسط والمقام

بقسمة كل من البسط والمقام على العامل المشترك

مثال (2)

اكتب كل مقدار من المقادير الآتية بأبسط صورة:

$$i) \frac{x^2 - 4}{(x^2 - 4x + 4)} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)^2} = \frac{(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{(x - 2)\cancel{(x - 2)}} = \frac{x + 2}{x - 2}$$

$$ii) \frac{5z + 10}{z - 3} \times \frac{z^3 - 27}{(z^2 + 6z + 8)} = \frac{5\cancel{(z + 2)}}{\cancel{z - 3}} \times \frac{\cancel{(z - 3)}(z^2 + 3z + 9)}{\cancel{(z + 2)}(z + 4)} = \frac{5(z^2 + 3z + 9)}{z + 4}$$

$$iii) \frac{16 - x^2}{3x + 5} \times \frac{(3x^2 + 2x - 5)}{(x^2 + 3x - 4)} = \frac{(4 + x)(4 - x)}{\cancel{(3x + 5)}} \times \frac{\cancel{(3x + 5)}\cancel{(x - 1)}}{\cancel{(x + 4)}(x - 1)} = 4 - x$$

$$iv) \frac{8 + t^3}{4 - 2t + t^2} \div \frac{(2 + t)^3}{t^2 + 9t + 14} = \frac{8 + t^3}{4 - 2t + t^2} \times \frac{t^2 + 9t + 14}{(2 + t)^3}$$

$$= \frac{\cancel{(2 + t)}(4 - \cancel{2t} + t^2)}{(4 - \cancel{2t} + t^2)} \times \frac{\cancel{(t + 2)}(t + 7)}{(2 + t)^3} = \frac{t + 7}{2 + t} = \frac{t + 7}{t + 2}$$

إضرب الأول في مقلوب الثاني

حلل البسط والمقام وقسم على العامل المشترك

Simplifying adding and subtracting rational algebraic expressions

تعلمت سابقاً كيفية تحليل المقادير الجبرية وكذلك كيفية إيجاد مضاعف مشترك أصغر (LCM): يمثل حاصل ضرب العوامل المشتركة بأكبر أس وغير المشتركة) عند تبسيط جمل عددية كسرية، والآن سوف نتعلم كيفية تبسيط جمع المقادير الجبرية النسبية (الكسرية) وطرحها وذلك بتحليل كل من بسط ومقام الكسر إلى أبسط صورة ثم إجراء عملية جمع وطرح المقادير الكسرية باستعمال المضاعف المشترك وتبسيط المقدار على أبسط صورة (simplest form).

مثال (3) أكتب المقدار الجبري النسبي بأبسط صورة:

$$\frac{y^2}{(y+2)} - \frac{4}{(y+2)}$$

المضاعف المشترك الأصغر (y + 2)

$$= \frac{y^2 - 4}{(y+2)}$$

تحليل البسط على صورة فرق بين مربعين

$$= \frac{(y+2)(y-2)}{(y+2)} = y - 2$$

بقسمة كل من البسط والمقام على y + 2

مثال (4) أكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

$$i) \frac{7x - 14}{x^2 - 4} + \frac{5}{(x+2)} = \frac{7(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{5}{x+2}$$

بتحليل البسط والمقام

$$= \frac{7}{x+2} + \frac{5}{x+2}$$

المضاعف المشترك الأصغر (x + 2)

$$= \frac{7+5}{x+2} = \frac{12}{x+2}$$

$$ii) \frac{4z}{2z-5} - \frac{z}{z+3} = \frac{4z}{2z-5} \times \left(\frac{z+3}{z+3}\right) - \frac{z}{z+3} \times \left(\frac{2z-5}{2z-5}\right)$$

المضاعف المشترك الأصغر

(2z - 5)(z + 3)

$$= \frac{4z(z+3) - z(2z-5)}{(2z-5)(z+3)} = \frac{2z^2 + 17z}{(2z-5)(z+3)} = \frac{z(2z+17)}{(2z-5)(z+3)}$$

$$iii) \frac{t^2 + 2t + 4}{t^3 - 8} + \frac{12}{3t - 6} = \frac{t^2 + 2t + 4}{(t-2)(t^2 + 2t + 4)} + \frac{12}{3(t-2)} = \frac{1}{(t-2)} + \frac{4}{(t-2)} = \frac{5}{(t-2)}$$

$$iv) \frac{8}{v+4} + \frac{2}{v-4} - \frac{1}{v^2-16} = \frac{8}{v+4} + \frac{2}{v-4} - \frac{1}{(v+4)(v-4)} = \frac{8(v-4) + 2(v+4) - 1}{(v+4)(v-4)}$$

$$= \frac{8v - 32 + 2v + 8 - 1}{(v+4)(v-4)} = \frac{10v - 25}{(v+4)(v-4)} = \frac{5(2v-5)}{(v+4)(v-4)}$$

أكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

1 $\frac{2z^2 - 4z + 2}{z^2 - 7z + 6}$

2 $\frac{y^3 + 27}{y^3 - 3y^2 + 9y}$

3 $\frac{5x + 3}{x + 3} \times \frac{x^2 + 5x + 6}{25x^2 - 9}$

4 $\frac{z^2 + 7z - 8}{z - 1} \times \frac{z^2 - 4}{z^2 + 6z - 16}$

5 $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 4} \times \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6}$

6 $\frac{2y^2 - 2y}{y^2 - 9} \div \frac{y^2 + y - 2}{y^2 + 2y - 3}$

الأسئلة (1 - 6)
مشابهة للمثالين (1،2)

أكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

7 $\frac{2}{x^2 - 9} + \frac{3}{x^2 - 4x + 3}$

8 $\frac{2y^3 - 128}{y^3 + 4y^2 + 16y} - \frac{y - 1}{y}$

9 $\frac{z^2 + z + 1}{z^4 - z} - \frac{z + 3}{z^2 + 2z - 3}$

10 $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} - 1$

11 $\frac{3}{z - 1} + \frac{2}{z + 3} + \frac{8}{z^2 + 2z - 3}$

12 $\frac{y - 3}{y - 1} + \frac{5y - 15}{(y - 3)^2} - \frac{3y + 1}{y^2 - 4y + 3}$

الأسئلة (7 - 12)
مشابهة للمثالين (3،4)

تدرب وحل التمرينات

أكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

13 $\frac{x + 5}{12x} \times \frac{6x - 30}{x^2 - 25}$

14 $\frac{y + 3}{2y^2 + 6y + 18} \times \frac{y^3 - 27}{y^2 - 9}$

15 $\frac{3 - x}{4 - 2x} \times \frac{x^2 + x - 6}{9 - x^2}$

16 $\frac{y + 2}{2y - 4} \div \frac{y^3 + 8}{y - 2}$

17 $\frac{y^2 - 7y}{y^3 - 27} \div \frac{y^2 - 49}{y^2 + 3y + 9}$

18 $\frac{64 - z^3}{32 + 8z + 2z^2} \div \frac{(4 - z)^2}{16 - z^2}$

أكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

19 $\frac{5}{x^2 - 36} - \frac{2}{x^2 - 12x + 36}$

20 $\frac{y^2 - y}{y^3 - 1} - \frac{1}{y^2 + y + 1}$

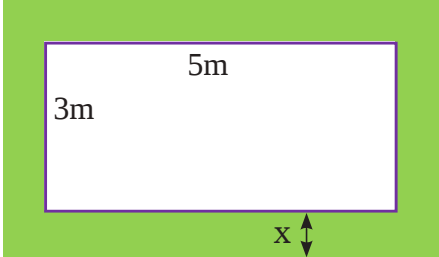
21 $\frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 2} + \frac{4 + 2x + x^2}{x^3 - 8}$

22 $\frac{y - 5}{y + 1} + \frac{y - 1}{y + 5} - \frac{25}{y^2 + 6y + 5}$

تدرب وحل مسائل حياتية



23 **مكتبة:** إذا كان المقدار الجبري $x^2 - 4$ يمثل عدد الكتب العلمية في المكتبة، والمقدار الجبري $x^2 + x - 6$ يمثل عدد الكتب الأدبية فيها. اكتب نسبة الكتب العلمية إلى الكتب الأدبية بأبسط صورة.



24 **هندسة:** مستطيل أبعاده 3 ، 5 أمتار وُسّع إلى مستطيل أكبر وذلك بإحاطته بممر عرضه x متر. اكتب المقدار الجبري الذي يمثل مجموع نسبتي طول المستطيل قبل التوسيع إلى طوله بعد التوسيع ونسبة عرض المستطيل قبل التوسيع إلى عرضه بعد التوسيع بأبسط صورة.



25 **ألعاب نارية:** المقدار الجبري $20 + 15t - 5t^2$ يمثل الارتفاع بالأمتار لقذيفة ألعاب نارية أُطلقت من سطح بناية ارتفاعها 20 متراً، إذ تمثل t زمن وصول القذيفة بالثواني إلى الهدف. والمقدار الجبري $4 + 19t - 5t^2$ يمثل ارتفاع قذيفة أخرى أُطلقت من سطح بناية ارتفاعها 4 أمتار. اكتب نسبة ارتفاع القذيفة الأولى إلى ارتفاع القذيفة الثانية بأبسط صورة.

فكر

26 **تحذّر:** بسّط المقدار الجبري الآتي إلى أبسط صورة:

$$\frac{y^2 - 5}{2y^3 - 16} \div \frac{y - \sqrt{5}}{2y^2 + 4y + 8}$$

27 **أصحّ الخطأ:** بسّطت سماح المقدار الجبري وكتبت به أبسط صورة كما يأتي:

$$\frac{z^2 - z - 30}{5 + z} \times \frac{2z + 12}{z^2 - 36} = 1$$

اكتشف خطأ سماح وصحّحه.

28 **حسّ عدديّ:** ما ناتج جمع المقدارين الجبريين بدون استعمال الورقة والقلم؟ وضّح إجابتك.

$$\frac{5}{x^2 - 49} + \frac{-4}{(x - 7)(x + 7)}$$

أكتب

$$\frac{z^2 + z - 6}{2z^2 + 2z - 12} \div \frac{z^2 - 16}{2z + 8}$$

قيمة المقدار الجبري بأبسط صورة



تعلم

تتخذ المباني الحديثة أشكالاً هندسية مختلفة،
ففي الصورة المجاورة فندق على شكل
إسطوانة دائرية قائمة مغلقة من جوانبها
بالزجاج. إذا كان نصف قطر قاعدة المبنى
 $x - 8$ أمتار وارتفاعه $x + 12$ متراً.
ما المساحة الجانبية للفندق؟

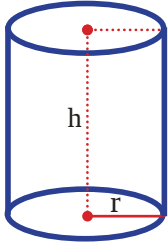
فكرة الدرس

- استعمال استراتيجية
الخطوات الأربع لحل
المسألة.

افهم

ما المعطيات في المسألة؟ مبنى الفندق على شكل إسطوانة، نصف قطر قاعدته $x - 8$ أمتار،
وارتفاعه $x + 12$ متراً.
ما المطلوب من المسألة؟ إيجاد المساحة الجانبية للفندق.

خطّط



كيف تحل المسألة؟ بما أن بناية الفندق مشابهة للشكل الأسطواني الدائري القائم،
لذا نطبق قانون المساحة الجانبية للأسطوانة القائمة وهي:

$$\text{المساحة الجانبية} = 2 \times \text{النسبة الثابتة} \times \text{نصف قطر القاعدة} \times \text{الارتفاع} \quad (LA = 2\pi rh)$$

حلّ

نصف قطر القاعدة = $x - 8$ متر

الارتفاع = $x + 12$ متر

$$LA = 2\pi \times r \times h$$

$$= 2\pi (x - 8) (x + 12)$$

$$= 2\pi (x^2 + 4x - 96)$$

$$= 2\pi x^2 + 8\pi x - 192\pi$$

عوّض في القانون بالمعطيات

إستعمل ضرب المقادير الجبرية

إستعمل خاصية التوزيع 6

المساحة الجانبية للفندق بالأمتار المربعة

تحقق

استعمل تحليل المقادير الجبرية للتحقق من صحة الحل.

$$LA = 2\pi x^2 + 8\pi x - 192\pi$$

$$= 2\pi (x^2 + 4x - 96)$$

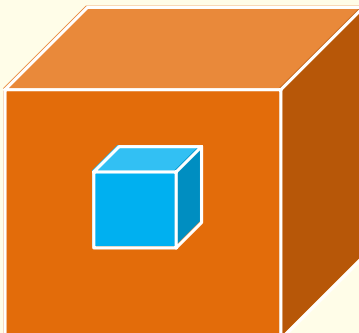
$$= 2\pi (x - 8) (x + 12)$$

إخراج عامل مشترك

تحليل المقدار الجبري بالتجربة

أي أنّ $r = x - 8$ ، $h = x + 12$ لذا فإنّ الحل صحيح.

حل المسائل التالية باستراتيجية (الخطوات الأربع)



1

مدينة الألعاب: بعض الألعاب في مدينة الألعاب تشغل مساحة أكبر من المساحة التي تشغلها وهي متوقفة. فلعبة الأرجوحة تشغل مساحة دائرية قطرها x متر عند الدوران، وعند توقفها فإن قطر المساحة التي تشغلها يقل بمقدار 8 أمتار. اكتب مقدار الفرق بين مساحتي التوقف والدوران للأرجوحة ثم حلّه.

2

دب الباندا: موطن دب الباندا الطبيعي هو سلسلة جبال وسط الصين، ويحتاج الباندا إلى منطقة واسعة في حديقة الحيوانات حتى يتكيف للعيش. وُسِّعت المنطقة المخصصة للباندا في إحدى حدائق الحيوان بمقدار 6 أمتار إلى كل من طول وعرض المنطقة فأصبح طول المنطقة $x + 8$ أمتار والعرض $x + 4$ متراً. ما مساحة المنطقة المخصصة للباندا قبل التوسعة؟

3

كرة الثلج: كرة الثلج وهي كرة شفافة، تُصنع من الزجاج تنطوي على منظر طبيعي و تحتوي على الماء ويستفاد من الماء بوصفه وسطاً لسقوط الثلج. إذا كان نصف قطر كرة الثلج $y - 3$ سنتمتر. فما حجم الكرة؟

4

هندسة: صندوق مكعب الشكل طول ضلعه x سنتمتر، وُضِعَ داخله مكعب أصغر منه طول ضلعه 3 سنتمتر. حلّل المقدار الجبري الذي يمثل الفرق بين حجمي المكعبين.

English	عربي	English	عربي
perfect square	مربع كامل	square of sum	مربع مجموع
the lost term	الحد المفقود	square of difference	مربع فرق
the unknown term	الحد المجهول	cubic of sum	مكعب مجموع
the middle	الأوسط	cubic of difference	مكعب فرق
the parties	الطرفان	factoring	تحليل
the middle term	الحد الأوسط	algebraic expression	مقدار جبري
sum of two cubes	مجموع مكعبين	greater common factor	عامل مشترك أكبر
difference between two cubes	فرق بين مكعبين	least common multiple	مضاعف مشترك أصغر
numerator	بسط الكسر	grouping	تجميع
dominator	مقام الكسر	inverse	معكوس
simplest form	أبسط صورة	check	تحقق
divide	يقسم	correct solution	الحل الصحيح
multiple	مضاعف	difference between two squares	فرق بين مربعين
completing the square	إكمال المربع	inverse operation	عملية عكسية

ضرب المقادير الجبرية

الدرس [1-2]

تدريب: جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:

- i) $(z + 6)^2 = \dots\dots\dots$
 ii) $(4x - 3)(4x + 3) = \dots\dots\dots$
 iii) $(5 + z)(25 - 5z + z^2) = \dots\dots\dots$

مثال: جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:

- i) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$
 ii) $(\sqrt{2} + z)(\sqrt{2} - z) = 2 - z^2$
 iii) $(x - 7)(x^2 + 7x + 49) = x^3 - 343 = x^3 - 7^3$

تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر

الدرس [2-2]

تدريب: حلل المقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر وتحقق من الحل:

$$\sqrt{8} x^2 z + \sqrt{3} (\sqrt{6} xz^2 - \sqrt{12} xz) = \dots\dots\dots$$

.....
 **التحقق:**

مثال: حلل المقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر وتحقق من صحة الحل:

$$4x^2 + 14x - 30 = 2(2x - 3)(x + 5)$$

التحقق: $2(2x - 3)(x + 5) = 2(2x^2 + 7x - 15) = 4x^2 + 14x - 30$

تدريب 1: حل كل مقدار جبري من المقادير الآتية
كفرق بين مربعين:

i) $4x^2 - 49 = \dots\dots\dots$

ii) $3x^2 - y^2 = \dots\dots\dots$

تدريب 2: حل المقدار الجبري الآتي كمربع كامل:

$81z^2 - 18z + 1 = \dots\dots\dots$

مثال 1: حل كل مقدار جبري من المقادير الآتية
كفرق بين مربعين :

i) $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$

ii) $25y^2 - 49 = (5y + 7)(5y - 7)$

مثال 2: حل المقدار الجبري الآتي كمربع كامل:

$$x^2 - 12x + 36 = (x)^2 - 2(x \times 6) + (6)^2$$

$$= (x - 6)(x - 6) = (x - 6)^2$$

تدريب 1: حل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى
أبسط صورة:

i) $y^2 - y - 20 = \dots\dots\dots$
الحد الأوسط

ii) $x^2 - 17x + 30 = \dots\dots\dots$
الحد الأوسط

تدريب 2: حل المقدار الجبري الآتي إلى أبسط صورة:

$7 - 23z + 6z^2 = \dots\dots\dots$
الحد الأوسط

مثال 1: حل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى
أبسط صورة:

i) $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$
الحد الأوسط $3x - 4x = -x$

ii) $y^2 - 8y + 15 = (y - 3)(y - 5)$
الحد الأوسط $-3x - 5x = -8x$

مثال 2: حل المقدار الجبري الآتي إلى أبسط صورة:

$5x^2 + 13x - 6 = (5x - 2)(x + 3)$
الحد الأوسط $15x - 2x = 13x$

الدرس [2-5] تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو فرق بين مكعبين

www.derasatv.net

تدريب: حل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

i) $x^3 + 27 = \dots\dots\dots$

.....

ii) $8z^3 + 125 = \dots\dots\dots$

.....

iii) $x^3 - 64 = \dots\dots\dots$

.....

iv) $\frac{1}{z^3} - \frac{1}{27} = \dots\dots\dots$

.....

مثال: حل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

i) $x^3 + 5^3 = (x + 5)(x^2 - 5x + 5^2)$

$= (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$

ii) $27z^3 + 8 = (3z)^3 + 2^3$

$= (3z + 2)(9z^2 - 6z + 4)$

iii) $y^3 - 125 = y^3 - 5^3 = (y - 5)(y^2 + 5y + 25)$

تبسيط المقادير الجبرية النسبية

الدرس [2-6]

تدريب: اكتب كل مقدار بأبسط صورة:

i) $\frac{z^2 - 4}{z + 2} \times \frac{z^2 + 9z + 20}{z^2 + 2z - 8} = \dots\dots\dots$

.....

ii) $\frac{27 - x^3}{2x^2 + 6x + 18} \div \frac{(3 - x)^2}{x^2 - x - 6} = \dots\dots\dots$

.....

iii) $\frac{4z}{2z - 5} - \frac{z}{z + 3} = \dots\dots\dots$

.....

.....

مثال 1: اكتب كل مقدار بأبسط صورة:

i) $\frac{x + 3}{2x - 6} \times \frac{x^3 - 27}{x^2 + 3x + 9}$

$= \frac{x + 3}{2(x - 3)} \times \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x^2 + 3x + 9} = \frac{x + 3}{2}$

ii) $\frac{125 + y^3}{25 - 5y + y^2} \div \frac{(5 + y)^3}{y^2 + 10y + 25}$

$= \frac{(5 + y)(25 - 5y + y^2)}{25 - 5y + y^2} \times \frac{(y + 5)^2}{(5 + y)^3} = 1$

iii) $\frac{3x - 15}{x^2 - 25} + \frac{2}{x + 5} = \frac{3(x - 5)}{(x + 5)(x - 5)} + \frac{2}{x + 5}$

$= \frac{3}{x + 5} + \frac{2}{x + 5}$

$= \frac{3 + 2}{x + 5} = \frac{5}{x + 5}$

Chapter Test

اختبار الفصل

www.derasatv.net

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

1 $(x + 5)^2$ 2 $(v - \sqrt{2})(v + \sqrt{2})$ 3 $(2 - x)(5 - x)$ 4 $(2y - 3)(y + 9)$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

5 $(x + 11)(x^2 - 11x + 121)$ 6 $(\frac{1}{3} - y)(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}y + y^2)$

7 $(y - 1)^3$ 8 $(z + \frac{1}{4})^3$

حلل المقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:

9 $8x^2 - 12x$ 10 $7y^3 + 14y^2 - 21y$ 11 $\sqrt{18}z^3r + \sqrt{2}(zr^2 - zr)$

حلل المقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

12 $\frac{2}{3}(y+5) + \frac{1}{3}y(y+5)$ 13 $\sqrt{5}z(z^2 - 1) - \sqrt{2}z^2(z^2 - 1)$

حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع:

14 $6x^4 - 18x^3 + 10x - 30$ 15 $56 - 8y + 14y^2 - 2y^3$

حلل المقدار بالتجميع مع المعكوس:

16 $9x^3 - 6x^2 + 8 - 12x$ 17 $\sqrt{11}z^3 - \sqrt{44}z^2 + 5(2 - z)$

حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية:

18 $16 - x^2$ 19 $\frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{27}$ 20 $\frac{1}{16}v - \frac{1}{2}v^4$

21 $8x^3 - \frac{1}{125}$ 22 $81 - 18y + y^2$ 23 $7z^2 - 36z + 5$

حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلله:

24 $25x^2 + 30x + 9$ 25 $49 - 14y + y^2$ 26 $4v^2 + 4\sqrt{5}v + 5$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحلله:

27 $x^2 + \dots + 81$ 28 $36 - 12y + \dots$ 29 $7 - \dots + 4z^2$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية:

30 $x^2 + 7x + 10$ 31 $x^2 - 5\sqrt{3}x + 18$ 32 $2v^2 + 9v + 7$

33 $32 - 16x + 2x^2$ 34 $\frac{1}{4}y^2 - 2y + 3$ 35 $12 - 7\sqrt{2}v + 2v^2$

36 $8 + 27x^3$ 37 $125y^3 - 1$ 38 $\frac{1}{v^3} - \frac{8}{27}$

39 $1 + 0.125y^3$ 40 $z^3 - 0.027$ 41 $3 - \frac{1}{9}v^3$

اكتب كل مقدار من المقادير التالية على أبسط صورة:

42 $\frac{27 - 8z^3}{4z^2 - 9} \div \frac{9 + 6z + 4z^2}{9 + 6z}$ 43 $\frac{7}{x^2 - 25} - \frac{6}{x^2 + 10x + 25}$

44 $\frac{y^2 - 1}{1 - y^3} + \frac{1 + y}{1 + 2y + y^2}$ 45 $\frac{z + 3}{z + 5} - \frac{z - 5}{z - 3} + \frac{1}{z^2 + 2z - 15}$

المعادلات

Equations

- الدرس 3-1 حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين
- الدرس 3-2 حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد
- الدرس 3-3 حل المعادلات التربيعية بالتجربة
- الدرس 3-4 حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل
- الدرس 3-5 حل المعادلات بالقانون العام
- الدرس 3-6 حل المعادلات الكسرية
- الدرس 3-7 خطة حل المسألة (كتابة معادلة)

سافر باسل وسعد في رحلات سياحية عن طريق مطار بغداد الدولي فكانت مجموعة باسل تقل بـ 22 شخصاً عن مجموعة سعد، فإذا كان مجموع الأشخاص المسافرين 122 شخصاً، فيمكن حساب عدد الأشخاص لكل مجموعة وذلك بحل المعادلتين الخطيتين من الدرجة الأولى $x + y = 122$ ، $x - y = 22$ إذ المتغير x يمثل عدد الأشخاص في مجموعة سعد والمتغير y يمثل عدد الأشخاص في مجموعة باسل.

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

1 $(y - 5)^2$

2 $(z + 2)(z - 2)$

3 $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

4 $(4 - y)(6 - y)$

5 $(3z - 2)(z + 8)$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

6 $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

7 $(\frac{1}{2} - y)(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}y + y^2)$

حلل المقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:

8 $5x^2 - 10x$

9 $9y^3 + 6y^2 - 3y$

10 $\sqrt{12}z^2 + \sqrt{3}z$

حلل المقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

11 $x(5 - x) - 3(5 - x)$

12 $\frac{1}{2}(y + 1) + \frac{1}{2}y(y + 1)$

13 $\sqrt{3}z(z - 1) - \sqrt{2}(z - 1)$

حلل المقدار باستعمال التجميع:

14 $6x^3 - 12x^2 + 5x - 10$

15 $9 - 18y + 7y^2 - 14y^3$

16 $\sqrt{2}z^4 - \sqrt{6}z^3 + z - \sqrt{3}$

حلل المقدار بالتجميع مع المعكوس:

17 $4x^3 - 2x^2 + 3 - 6x$

18 $\frac{3}{4}y^3 - \frac{1}{4}y^2 + 4 - 12y$

19 $\sqrt{4}z^3 - \sqrt{25}z^2 + 3(5 - 2z)$

حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية:

20 $y^2 - 25$

21 $\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{8}$

22 $36 - 12x + x^2$

23 $y^2 - 2y - 15$

حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلله:

24 $16x^2 + 40x + 25$

25 $64 - 16y + y^2$

26 $z^2 - 6z - 9$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحلله:

27 $x^2 + \dots + 64$

28 $9 - 24y + \dots$

29 $5 - \dots + 4z^2$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية:

30 $18 - 3y - y^2$

31 $z^2 - 2\sqrt{3}z + 3$

32 $4 - 21x + 5x^2$

33 $1 + 27z^3$

34 $y^3 - 125$

35 $y^3 - \frac{1}{8}$

36 $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{64}$

37 $1 - 0.125z^3$

الدرس 13-1 حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين

Solving the system of two Linear Equations with two variables



تعلم

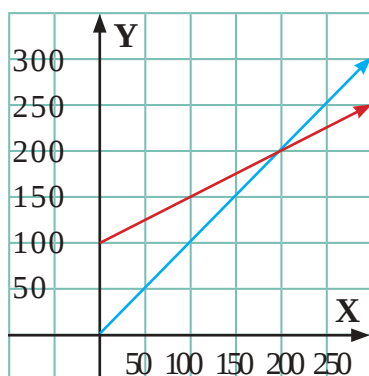
لدى أحمد معمل تعليب التمور، بلغت تكاليف العلب وهي فارغة 100000 دينار، وملء العلبة الواحدة بالتمر يكلف 500 دينار، وتباع بـ 1000 دينار. ويرغب أحمد في معرفة عدد العلب التي عليه بيعها ليحقق ربحاً.

فكرة الدرس

- حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً وبالتعويض وبالتحذف .
- المفردات
- معادلة خطية
- نظام المعادلات الخطية
- حل النظام

13-1-1 حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً Solving the system of two linear equations by graphic method

لتكن $L_1 : a_1x + b_1y = c_1$ ، $L_2 : a_2x + b_2y = c_2$ معادلتين من الدرجة الأولى (خطيتين) بمتغيرين x ، y ، لحل هذا النظام بيانياً نتبع ما يأتي: (1) تمثيل كل من المستقيمين في المستوي الإحداثي. (2) لإيجاد إحداثي نقطة تقاطع المستقيمين يُرسم عمودان من النقطة على المحورين الصادي والسيني فتكون نقطة التقاطع تمثل مجموعة الحل.



مثال (1) من تعلم، جد عدد العلب التي يبيعها أحمد ليحقق ربحاً.

نفرض تكاليف الإنتاج بالمتغير y ، وعدد العلب المباعة بالمتغير x ، وعليه:

معادلة تمثل تكاليف الإنتاج الكلية (1) $y = 500x + 100000$

معادلة تمثل القيمة الكلية للمبيعات (2) $y = 1000x$

تدريج المحور y بألوف الدنانير

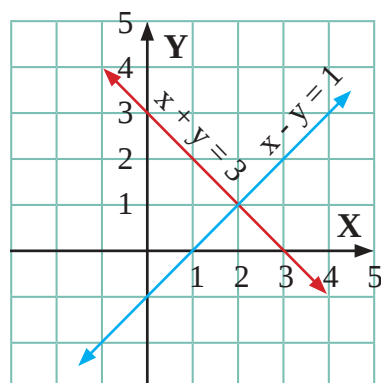
نمثل المعادلتين بيانياً وتحديد نقطة تقاطع المستقيمين (200،200)

التي تمثل بيع 200 علبة، وتحقيق الربح يبدأ عندما يبيع أكثر من 200 علبة.

الزوج المرتب (200،200) الذي هو حل للمعادلتين يسمى حلاً للنظام.

مثال (2) جد مجموعة الحل للنظام بيانياً . (1) $x - y = 1$

(2) $x + y = 3$



نمثل المعادلتين بيانياً ونحدد نقطة تقاطع المستقيمين (2,1)

لتمثيل المعادلات بيانياً نأخذ نقاط التقاطع مع المحاور

المعادلة (1) $x | y = x - 1$ ، المعادلة (2) $x | y = 3 - x$

$0 | 3$ ، $0 | -1$
 $3 | 0$ ، $1 | 0$

النقاط (3 ، 0) ، (0 ، 3)

النقاط (1 ، 0) ، (0 ، -1)

مجموعة الحل للنظام هي $S = \{(2,1)\}$

للتحقق من صحة الحل نعوض عن قيمة المتغيرين x ، y في كلا المعادلتين للحصول على عبارتين صائبتين.

التعويض بالمعادلة (1) $x - y = 1 \rightarrow 2 - 1 = 1 \rightarrow 1 = 1$

التعويض بالمعادلة (2) $x + y = 3 \rightarrow 2 + 1 = 3 \rightarrow 3 = 3$

[3-1-2] حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض

Solving the system of two linear equations by substitution method

تتلخص هذه الطريقة لحل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين x, y ، نقوم بتحويل إحدى المعادلتين إلى معادلة بمتغير واحد فقط وذلك بإيجاد علاقة بين x, y من إحدى المعادلتين وتعويضها في المعادلة الأخرى.

مثال (3) جد مجموعة الحل للنظام باستعمال التعويض:

i) $y = 4x$ (1) } نعوض عن قيمة y من المعادلة (1) في المعادلة (2)
 $y = x + 6$ (2) } نحل المعادلة ونجد قيمة المتغير x
 $\Rightarrow 4x = x + 6$
 $\Rightarrow 4x - x = 6 \Rightarrow x = 2$
 $y = x + 6 \Rightarrow y = 2 + 6 \Rightarrow y = 8$ نعوض عن قيمة x بالمعادلة (2) لإيجاد قيمة المتغير y
 لذا مجموعة الحل للنظام هي $\{(2, 8)\}$

ii) $x + 8y = 10$ (1) } نجد قيمة x من المعادلة (2)
 $x - 4y = 2$ (2) } ونعوضها في المعادلة (1)
 $2 + 4y + 8y = 10 \Rightarrow 12y = 8 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$ نعوض عن قيمة y بالمعادلة (1) ...
 $x + 8y = 10 \Rightarrow x + 8 \times \frac{2}{3} = 10 \Rightarrow x = 10 - \frac{16}{3} \Rightarrow x = \frac{14}{3}$
 لذا مجموعة الحل للنظام هي $\{(\frac{14}{3}, \frac{2}{3})\}$

[3-1-3] حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف

Solving the system of two linear equations by elimination method

تتلخص هذه الطريقة لحل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين x, y وذلك بحذف أحد المتغيرين وجعل معامل أحدهما متساوياً بالقيمة ومختلفاً بالإشارة في كلا المعادلتين.

مثال (4) جد مجموعة الحل للنظام باستعمال الحذف:

i) $x + 2y = 5$ (1) } نضرب طرفي المعادلة (2).... في العدد 2
 $3x - y = 1$ (2) } ثم نجمعها مع المعادلة (1) ...
 $\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 & \text{.....(1)} \\ 6x - 2y = 2 & \text{.....(2)} \end{cases}$ بالجمع
 $7x = 7 \Rightarrow x = 1$ نعوض عن قيمة x في إحدى المعادلتين (بأبسط معادلة)
 $x + 2y = 5 \Rightarrow 1 + 2y = 5 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2$ نعوض في المعادلة(1)
 لذا مجموعة الحل للنظام هي $\{(1, 2)\}$

ii) $3x + 4y = 10$ (1) } نضرب المعادلة (1).... في العدد 2
 $2x + 3y = 7$ (2) } والمعادلة (2).... في العدد 3 ثم نطرح المعادلتين
 $\Rightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 21 & \text{.....(2)} \\ \mp 6x \mp 8y = \mp 20 & \text{.....(1)} \end{cases}$ بالطرح
 $y = 1$ نعوض عن قيمة y في إحدى المعادلتين (قبل تغيير الإشارة)
 $2x + (3 \times 1) = 7 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$ نعوض في المعادلة(2)
 لذا مجموعة الحل للنظام هي $\{(2, 1)\}$

تأكد من فهمك جد مجموعة الحل للنظام بيانياً:

$$\begin{cases} 1 & 3x - y = 6 \\ & x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 & y - x = 3 \\ & y + x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 & y = x - 2 \\ & y = 3 - x \end{cases}$$

الأسئلة (1-3)
مشابهة للمثالين (1،2)

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة التعويض لكل مما يأتي:

$$\begin{cases} 4 & 2x + 3y = 1 \\ & 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 & x - 2y = 11 \\ & 2x - 3y = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 & y - 5x = 10 \\ & y - 3x = 8 \end{cases}$$

الأسئلة (4-6)
مشابهة للمثال (3)

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي:

$$\begin{cases} 7 & 3x - 4y = 12 \\ & 5x + 2y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 & x - 3y = 6 \\ & 2x - 4y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 & 3y - 2x - 7 = 0 \\ & y + 3x + 5 = 0 \end{cases}$$

الأسئلة (7-9)
مشابهة للمثال (4)

جد مجموعة الحل للنظام وتحقق من صحة الحل:

$$\begin{cases} 10 & \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \\ & y - \frac{x}{3} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11 & 0.2x - 6y = 4 \\ & 0.1x - 7y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12 & \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 2\frac{3}{4} \\ & \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = 6\frac{1}{4} \end{cases}$$

جد مجموعة حل للنظام بيانياً:

تدرب وحل التمرينات

$$\begin{cases} 13 & x - y = -4 \\ & y + x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14 & y = x - 4 \\ & x = 2 - y \end{cases}$$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة التعويض لكل مما يأتي:

$$\begin{cases} 15 & 3x + 2y = 2 \\ & x - y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 & 2x - y = -4 \\ & 3x - y = 3 \end{cases}$$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي:

$$\begin{cases} 17 & 3x = 22 - 4y \\ & 4y = 3x - 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18 & 5x - 3y = 6 \\ & 2x + 5y = -10 \end{cases}$$

جد مجموعة الحل للنظام وتحقق من صحة الحل:

$$\begin{cases} 19 & \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 2 \\ & 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20 & 0.2x - 3y = 3 \\ & 0.1x - 6y = -3 \end{cases}$$



21 **طقس:** تقل عدد الأيام (x) التي تنخفض فيها درجة الحرارة في مدينة بغداد لشهر كانون الثاني عن 10 درجات سيليزية بمقدار 9 أيام على عدد الأيام (y) التي تزداد فيها درجة الحرارة على 10 درجات سيليزية. اكتب معادلتين تمثل هذا الموقف، ثم جد حلّهما بطريقة الحذف لإيجاد عدد الأيام في كل حالة.



22 **تجارة:** باع متجر 25 ثلاجة وغسالة، بسعر مليون دينار للثلاجة ونصف مليون دينار للغسالة. إذا كان ثمن هذه الأجهزة 20 مليون دينار فكم جهازاً باع من كل نوع؟ اكتب معادلتين تمثلان المسألة ثم حلّهما بطريقة التعويض.



23 **حفلة تخرج:** عمل سجاد وأنور حفلة بمناسبة تخرجهما من الكلية فكان عدد الأصدقاء الذين دعاهم سجاد أكثر بثلاثة من عدد الأصدقاء الذين دعاهم أنور. وكان عدد المدعوين 23 شخصاً، فكم شخصاً دعا كل منهما؟ اكتب معادلتين تمثلان المسألة ثم حلّهما لإيجاد المطلوب.

فكر

24 **تحذّر:** جد مجموعة الحل للنظام:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{6}x - \frac{1}{3}y = 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 3 \end{array} \right.$$

25 **أصحّ الخطأ:** قال أحمد إن مجموعة حل للنظام:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 6 \\ 3x + 2y = 1 \end{array} \right.$$

هي المجموعة $\left\{ \left(\frac{5}{16}, \frac{5}{9} \right) \right\}$

اكتشف خطأ أحمد وصحّحه.

أكتب

مجموعة حل للنظام:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x - 6y = 0 \\ x + 2y = 4 \end{array} \right.$$



تعلم

تعد الزقورة من المعالم الحضارية في العراق
إذ انها تقع في جنوب العراق.
رسمٌ بأسل لوحةً جداريةً للزقورة مربعة
الشكل مساحتها $9m^2$ على جدار إسمنتي. جد
طول ضلع اللوحة .

فكرة الدرس

- حل المعادلة المولفة من حدين بتحليل الفرق بين مربعين.
- مفردات
- معادلة
- درجة ثانية
- متغير واحد
- فرق بين مربعين

13-2-1 حل المعادلات بالتحليل فرق بين مربعين

Using difference between two squares to solve equations

المعادلة العامة من الدرجة الثانية بمتغير واحد $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $(a \neq 0)$ وإن $a, b, c \in R$.
وحلها يعني إيجاد مجموعة قيم المتغير (x) التي تحقق المعادلة أي تجعلها عبارة صحيحة.
وسوف ندرس في هذا البند حل المعادلات المولفة من حدين باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين وخاصية الضرب الصفري.

مثال (1)

اكتب معادلة تمثل مساحة اللوحة، ثم حلها لإيجاد طول ضلع اللوحة.

$$x^2 = 9$$

افرض طول ضلع اللوحة هو المتغير x والمعادلة التي تمثل مساحة اللوحة هي:

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$$

التحليل باستعمال الفرق بين مربعين

$$\Rightarrow x + 3 = 0 \text{ or } x - 3 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$\Rightarrow (x = -3 \text{ يهمل}) \text{ or } x = 3$$

طول اللوحة الجدارية هو $3m$

مثال (2) حل المعادلة التالية باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل:

$$16 - y^2 = 0 \Rightarrow (4 + y)(4 - y) = 0$$

التحليل باستعمال الفرق بين مربعين

$$4 + y = 0 \text{ or } 4 - y = 0 \Rightarrow y = -4 \text{ or } y = 4 \Rightarrow S = \{-4, 4\}$$

مجموعة الحل

التحقق: كل قيمة في مجموعة الحل للمتغير y يجب أن تحقق المعادلة

$$L.S = 16 - y^2 = 16 - (-4)^2 = 16 - 16 = 0 = R.S$$

بالتعويض عن -4

$$L.S = 16 - y^2 = 16 - 4^2 = 16 - 16 = 0 = R.S$$

بالتعويض عن 4

مثال (3) حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين:

$$i) 4x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (2x + 5)(2x - 5) = 0 \Rightarrow 2x + 5 = 0 \text{ or } 2x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ or } x = \frac{5}{2} \Rightarrow S = \{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\}$$

$$ii) 3z^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3(z^2 - 4) = 0 \Rightarrow (z + 2)(z - 2) = 0$$

بقسمة الطرفين على 3 ثم التحليل

$$\Rightarrow z + 2 = 0 \text{ or } z - 2 = 0 \Rightarrow S = \{-2, 2\}$$

$$iii) 2y^2 - 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 3 = 0 \Rightarrow (y + \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{3} \text{ or } y = \sqrt{3} \Rightarrow S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

$$iv) x^2 - 5 = 0 \Rightarrow (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{5} \text{ or } x = \sqrt{5} \Rightarrow S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

$$v) (z + 1)^2 - 36 = 0 \Rightarrow (z + 1 + 6)(z + 1 - 6) = 0 \Rightarrow (z + 7)(z - 5) = 0 \Rightarrow S = \{-7, 5\}$$

Using square root property to solve the equations

تعلمت في البند السابق كيفية حل المعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد بطريقة التحليل باستعمال الفرق بين مربعين، والآن سوف نجد مجموعة الحل للمعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد بطريقة خاصية الجذر التربيعي:

$$\sqrt{x^2} = |x| \geq 0$$

$$25 = 5^2 \Rightarrow \sqrt{25} = \sqrt{(5^2)} = |5| = 5$$

$$25 = (-5)^2 \Rightarrow \sqrt{25} = \sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$$

وبصورة عامة إذا كان a عدد حقيقي موجب فإن: $x^2 = a \Rightarrow x = \pm \sqrt{a}$

مثال (4) حل المعادلة التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي وتحقق من صحة الحل:

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm \sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\Rightarrow S = \{3, -3\}$$

باستعمال قاعدة الجذر التربيعي

مجموعة الحل للمعادلة

التحقق: كل قيمة في مجموعة الحل للمتغير x يجب أن تحقق المعادلة

$$L.S = x^2 = 3^2 = 9 = R.S$$

بالتعويض عن $x = 3$

$$L.S = x^2 = (-3)^2 = -3 \times -3 = 9 = R.S$$

بالتعويض عن $x = -3$

مثال (5) حل المعادلة التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

$$i) y^2 = 36 \Rightarrow y = \pm \sqrt{36} \Rightarrow y = \pm 6 \Rightarrow S = \{6, -6\}$$

$$ii) z^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow z = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow z = \pm \frac{3}{5} \Rightarrow S = \{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\}$$

$$iii) x^2 + 81 = 0 \Rightarrow x^2 = -81 \quad (\text{لا يوجد حل في الأعداد الحقيقية (لا يوجد عدد حقيقي مربعه سالب)})$$

$$iv) 3y^2 = 7 \Rightarrow y^2 = \frac{7}{3} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{7}{3}} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \Rightarrow S = \{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\}$$

$$v) 4x^2 - 5 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow S = \{\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\}$$

ملاحظة: إذا ربعت طرفي معادلة صحيحة فإن المعادلة الناتجة تبقى صحيحة ($y = x \Rightarrow y^2 = x^2$)، مثلاً:

$$\sqrt{x} = 5 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 5^2 \Rightarrow x = 25$$

$$x^2 = y^2 \not\Rightarrow x = y$$

والعكس ليس صحيح أي أن:

مثال (6) حل المعادلات التالية:

$$i) 3\sqrt{x} = 18 \Rightarrow \sqrt{x} = 6 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 6^2 \Rightarrow x = 36 \Rightarrow S = \{36\} \quad \text{بتربيع طرفي المعادلة}$$

$$ii) \sqrt{y+8} = 3 \Rightarrow (\sqrt{y+8})^2 = 3^2 \Rightarrow y+8 = 9 \Rightarrow y = 9-8 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow S = \{1\}$$

$$iii) \sqrt{5z} = 7 \Rightarrow (\sqrt{5z})^2 = 7^2 \Rightarrow 5z = 49 \Rightarrow z = \frac{49}{5} \Rightarrow S = \{\frac{49}{5}\}$$

$$iv) \sqrt{\frac{x}{13}} = 1 \Rightarrow (\sqrt{\frac{x}{13}})^2 = 1^2 \Rightarrow \frac{x}{13} = 1 \Rightarrow x = 13 \Rightarrow S = \{13\}$$

تأكد من فهمك

حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل:

1 $x^2 - 16 = 0$

2 $81 - y^2 = 0$

3 $2z^2 - 8 = 0$

الأسئلة (1 - 3)

مشابهة للمثال (2)

حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين:

4 $4x^2 - 9 = 0$

5 $5y^2 - 20 = 0$

6 $(y + 2)^2 - 49 = 0$

7 $(3 - z)^2 - 1 = 0$

8 $x^2 - 3 = 0$

9 $y^2 - \frac{1}{9} = 0$

الأسئلة (4 - 9)

مشابهة للمثال (3)

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

10 $x^2 = 64$

11 $z^2 = 7$

12 $2y^2 = \frac{49}{8}$

13 $6z^2 - 5 = 0$

14 $4(x^2 - 12) = 33$

15 $z^2 + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

الأسئلة (10 - 15)

مشابهة للمثال (4)

حل المعادلات التالية:

16 $3\sqrt{x} = 15$

17 $\sqrt{y - 5} = 2$

18 $\sqrt{2z} = 6$

الأسئلة (16 - 18)

مشابهة للمثال (5)

تدرب وحل التمرينات

حل المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

19 $x^2 = 49$

20 $5y^2 - 10 = 0$

21 $3z^2 - 27 = 0$

حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين:

22 $9x^2 - 36 = 0$

23 $7y^2 - 28 = 0$

24 $9(x^2 - 1) - 7 = 0$

25 $(y + 5)^2 - 64 = 0$

26 $x^2 - 2 = 0$

27 $y^2 - \frac{1}{36} = 0$

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

28 $x^2 = 121$

29 $50 - 2y^2 = 0$

30 $x^2 = \frac{1}{64}$

31 $3y^2 = \frac{25}{3}$

32 $7(x^2 - 2) = 50$

33 $\frac{1}{5}y^2 = \frac{1}{3}$

حل المعادلات التالية:

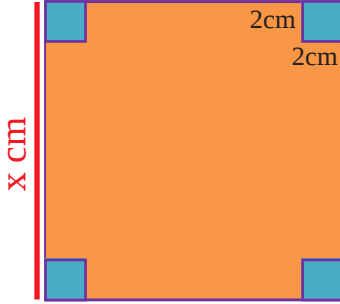
34 $6\sqrt{x} = 30$

35 $\sqrt{y - 9} = 4$

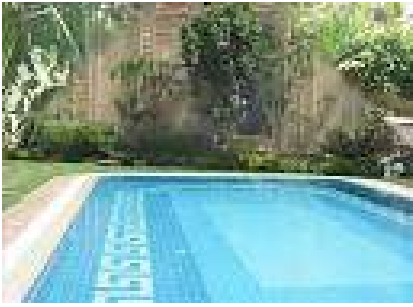
36 $\sqrt{4z} = 8$



37 **موكيت سجاد:** قطعة موكيت سجاد مستطيلة طولها 12m وعرضها 3m، قُطعت إلى أجزاء لتغطية أرضية غرفة مربعة الشكل. أكتب معادلة تمثل المسألة ثم جد طول ضلع الغرفة.



38 **هندسة:** قطعة كارتون مربعة الشكل طول ضلعها x cm، قطعت أربعة مربعات متساوية من زواياها طول ضلع كل مربع 2cm، وثُبِت لتكون صندوقاً دون غطاء على شكل متوازي سطوح مستطيلة حجمه 32 cm^3 . أكتب معادلة تمثل المسألة ثم جد طول ضلع قطعة الكارتون الأصلية.



39 **نافورة:** صُمِّم حوض سباحة مربع الشكل طول ضلعه 3m في منتصف حديقة مربعة الشكل، فكانت المساحة المتبقية من الحديقة والمحيطة بالحوض 40 m^2 ، أكتب معادلة تمثل المسألة ثم جد طول ضلع الحديقة.

فكر

40 **تحذ:** حل المعادلات التالية:

i) $9(x^2 + 1) = 34$

ii) $4x^2 - 3 = 0$

41 هل المجموعة المعطاة تمثل مجموعة الحل للمعادلة أم لا؟

i) $(2y + 1)^2 = 16$ ، $\{\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\}$

ii) $3x^2 - 7 = 0$ ، $\{\frac{7}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{\sqrt{3}}\}$

42 **أصح الخطأ:** قال صلاح إن المجموعة $\{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\}$ تمثل مجموعة الحل للمعادلة $5x^2 = 4$ اكتشف خطأ صلاح وصححه.

43 **حس عددي:** عدد صحيح موجب من رقم واحد لو أنقص من مربعه واحد لكان الناتج عدد من مضاعفات العشرة. ما العدد؟

أكتب

مجموعة الحل للمعادلة:

$(8 - 3y)^2 - 1 = 0$

Using Probe and Error to solve the Quadratic Equations



تعلم

إذا كان طول ملعب كرة السلة
يزيد بمقدار 2m على ضعف
عرضه، ومساحته $480m^2$.
فما بُعدي الملعب؟

فكرة الدرس

- حل المعادلات من الدرجة الثانية المؤلفة من ثلاثة حدود بالتحليل بالتجربة.

المفردات

- المعادلة التربيعية
- التجربة

[3-3-1] حل المعادلة $x^2 + bx + c = 0$ Solving the equation $x^2 + bx + c = 0$

تعرفت سابقاً كيفية إيجاد تحليل مقدار جبري مؤلف من ثلاثة حدود بواسطة التجربة، والآن سوف تستعمل التحليل في حل المعادلات من الدرجة الثانية والمؤلفة من ثلاثة حدود $x^2 + bx + c = 0$ إذ b, c أعداد حقيقية. (تحليل المقدار إلى قوسين بإشارتين مختلفتين أو بإشارتين متشابهتين بحسب إشارة الحد المطلق والحد الأوسط).

مثال (1) إيجاد بُعدي ملعب كرة السلة.

نفرض أن عرض الملعب بالمتغير x ، ولذا فإنّ طول الملعب يكون $2x + 2$

مساحة الملعب = الطول $\times$ العرض

$$x(2x + 2) = 480 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 480 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 240 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 16)(x - 15) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 16 = 0 \Rightarrow x = -16 \\ \text{or } x - 15 = 0 \Rightarrow x = 15 \end{cases}$$

الحد الأوسط $-15x + 16x = x$

يهمل لأنه لا يوجد طول بالسالب

لذا عرض الملعب 15m وطوله $2 \times 15 + 2 = 32m$

مثال (2) حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

$$i) x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ or } x = 4 \Rightarrow S = \{3, 4\}$$

$$ii) y^2 + 8y + 15 = 0 \Rightarrow (y + 3)(y + 5) = 0 \Rightarrow y = -3 \text{ or } y = -5 \Rightarrow S = \{-3, -5\}$$

$$iii) z^2 + z - 30 = 0 \Rightarrow (z + 6)(z - 5) = 0 \Rightarrow z = -6 \text{ or } z = 5 \Rightarrow S = \{-6, 5\}$$

$$iv) x^2 - 2x - 63 = 0 \Rightarrow (x - 9)(x + 7) = 0 \Rightarrow x = 9 \text{ or } x = -7 \Rightarrow S = \{9, -7\}$$

(v) ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 12؟

نفرض العدد x ، فيكون مربع العدد x^2 ، والجملة العددية التي تمثل المسألة هي:

$$x^2 - x = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ or } x = -3$$

لذا العدد إما 4 أو -3

[3-2-3] حل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ وأن $a \neq 0$

Solving the equation $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

تعلمت سابقاً حل معادلة من الدرجة الثانية بطريقة التجربة وأن المتغير x^2 من دون معامل، أما الآن فستتعلم كيفية حل المعادلة نفسها ولكن مع وجود معامل للمتغير x^2 .



مثال (3) مسبح يقل طوله عن ثلاثة أمثال عرضه بمقدار 1m. فإذا كانت مساحة المسبح 140 m^2 ، جد أبعاده.

نفرض عرض المسبح بالمتغير x

لذا طول المسبح $3x - 1$

المعادلة التي تمثل المسألة هي $x(3x - 1) = 140$ ، نحل المعادلة:

$$x(3x - 1) = 140 \Rightarrow 3x^2 - x - 140 = 0$$

الحد الأوسط $-21x + 20x = -x$

$$\Rightarrow (3x + 20)(x - 7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 20 = 0 \Rightarrow x = -\frac{20}{3} \\ \text{or } x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$$

يُهمل لأنه لا يوجد طول بالسالب

لذا عرض المسبح 7m وطوله 20m

مثال (4) حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

i) $4y^2 - 14y + 6 = 0 \Rightarrow (4y - 2)(y - 3) = 0$

الحد الأوسط $-12y - 2y = -14y$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ \text{or } y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \end{cases} \Rightarrow S = \{\frac{1}{2}, 3\}$$

ii) $3x^2 + 18x - 21 = 0 \Rightarrow (3x - 3)(x + 7) = 0$

الحد الأوسط $21x - 3x = 18x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \text{or } x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \end{cases} \Rightarrow S = \{1, -7\}$$

iii) $20 + 13z + 2z^2 = 0 \Rightarrow (4 + z)(5 + 2z) = 0$

الحد الأوسط $8z + 5z = 13z$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 + z = 0 \Rightarrow z = -4 \\ \text{or } 5 + 2z = 0 \Rightarrow z = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \{-4, -\frac{5}{2}\}$$

iv) $9x^2 - 69x - 24 = 0 \Rightarrow 3(3x^2 - 23x - 8) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 23x - 8 = 0$

$$\Rightarrow (3x + 1)(x - 8) = 0$$

الحد الأوسط $-24x - x = -23x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ \text{or } x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \end{cases} \Rightarrow S = \{-\frac{1}{3}, 8\}$$

تأكّد من فهمك

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

1 $x^2 - 9x + 18 = 0$

2 $x^2 - 4x - 32 = 0$

3 $y^2 + 48y - 49 = 0$

4 $y^2 + 9y - 36 = 0$

5 $x^2 - 3x + 2 = 0$

6 $y^2 - 8y - 33 = 0$

الأسئلة (1 - 6)

مشابهة للمثال (2)

الأسئلة (7 - 9)

مشابهة للمثال (1)

7 ما العدد الذي مربعه يزيد على ضعفه بمقدار 35 ؟

8 ما العدد الذي لو أضيف 4 أمثاله إلى مربعه لكان الناتج 45 ؟

9 سجادة طولها يزيد على عرضها بمقدار 2m ومساحتها 48m². ما أبعاد السجادة؟

حل المعادلات الآتية:

10 $15x^2 - 11x - 14 = 0$

11 $6 + 7x - 5x^2 = 0$

12 $42 + 64y + 24y^2 = 0$

13 $36 - 75x + 6x^2 = 0$

14 $70 - 33y + 2y^2 = 0$

الأسئلة (10 - 14)

مشابهة للمثال (4)

السؤال (15)

مشابه للمثال (3)

15 أرض مستطيلة الشكل يزيد طولها بمقدار 4m على عرضها. ما بُعدا الأرض إذا

كانت مساحتها 60m² ؟

تدرب وحل التمرينات

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

16 $x^2 - 15x + 56 = 0$

17 $y^2 + 16y + 63 = 0$

18 $x^2 + 15x - 16 = 0$

19 $y^2 - y - 42 = 0$

20 $x^2 - 4x + 3 = 0$

21 $y^2 - 6y - 55 = 0$

22 قطعة معدن مستطيلة الشكل ينقص عرضها بمقدار 2m عن طولها. ما بُعدا القطعة المعدنية إذا كانت

مساحتها 24m² ؟

23 $12x^2 - 20x + 7 = 0$

24 $28 + 2z - 8z^2 = 0$

25 $81 - 9x - 12x^2 = 0$

26 $50z^2 + 10z - 4 = 0$

27 صالة طعام ينقص طولها عن مثلي عرضها بمقدار 3m ومساحتها 54m². ما أبعاد الصالة؟

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

28 $x^2 - 4x + 3 = 0$

29 $y^2 - 9y - 36 = 0$

30 $4 - 26x + 12x^2 = 0$

31 $80 - 38y + 3y^2 = 0$

تدرب وحل مسائل حياتية



32 **رياضة:** إذا كان طول صورة إعلانية لملاعب كرة القدم يزيد بمقدار 4m على ضعف عرضها، فما بعدا الصورة إذا كانت مساحتها 160 m^2 ؟



33 **حقل نعام:** إذا كان طول حقل لتربية طيور النعام يقل بمقدار 4m عن ضعف عرضه، فإذا كانت مساحة الحقل 96 m^2 ، فهل يكفي سياج طوله 44m لتحويط الحقل؟



34 **إطار صورة:** اشترى سامر إطار لصورة، طوله ضعف عرضه. يحتاج سامر إلى تصغير الإطار بمقدار 2cm من طوله وعرضه ليصبح مناسباً للصورة، فما أبعاد الإطار الذي اشتراه سامر، إذا كانت مساحة الصورة 40 cm^2 ؟

فكر

35 **تحذ:** حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

i) $(x - 3)(x + 2) = 14$

ii) $3y^2 - 11y + 10 = 80$

36 **وضح:** هل أن المجموعة المعطاة تمثل مجموعة حل للمعادلة أم لا؟

i) $4x^2 + 2x = 30$ ، $\{-\frac{2}{5}, 3\}$

ii) $42 - 33y + 6y^2 = 0$ ، $\{2, \frac{7}{2}\}$

37 **أصح الخطأ:** قالت رنا إن مجموعة الحل للمعادلة $2x^2 - 34x + 60 = 0$ هي $\{3, 15\}$. أعدد خطأ رنا وأصححه.

أكتب

معادلة تمثل المسألة التالية ثم جد حلها:
ما العدد الذي ينقص ضعفه عن مربعه بمقدار 35 ؟



تعلم

الجاكور (Panthera onca) هو أحد السنوريات الكبرى المنتمية لجنس النمور، جد قيمة x من المعادلة $x^2 - 20x + 100 = 0$ والتي تمثل طول ضلع المنطقة المربعة المحددة له بالمتر المربع في حديقة الحيوانات.

فكرة الدرس

• حل المعادلات التربيعية بطريقة إكمال المربع.

المفردات

- الحد الأول
- الحد الأخير
- مربع كامل
- إكمال المربع

[3-4-1] حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل

Solving the quadratic equations by perfect square

تعرفت سابقاً كيفية تحليل مقدار جبري على هيئة مربع كامل، والآن سوف نستعمل هذا التحليل في حل معادلات بالتحليل بالمربع الكامل لإيجاد مجموعة الحل للمعادلة.

مثال (1)

ما المقدار الذي يمثل طول ضلع المنطقة المربعة؟

$$x^2 - 20x + 100 = 0$$

$$2(x \times 10)$$

$$x^2 - 20x + 100 = 0 \Rightarrow (x - 10)^2 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x - 10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10 \\ \text{or } x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10 \end{cases}$$

لذا طول ضلع المنطقة المربعة المخصصة للنمر هو 10m

لتحليل الطرف الأيسر من المعادلة نتأكد من أن المقدار يمثل مربعاً كاملاً

مربع كامل لأن: الحد الأوسط = $2 \times (\text{جذر الحد الأول} \times \text{جذر الحد الأخير})$

تحليل المقدار

مثال (2) حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

i) $4x^2 + 20x + 25 = 0$

الحد الأوسط $2 \times (2x \times 5) = 20x$

$\Rightarrow (2x + 5)^2 = 0 \Rightarrow 2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$ نأخذ أحد العوامل المتكررة

ii) $y^2 - y + \frac{1}{4} = 0$

الحد الأوسط $2 \times (y \times \frac{1}{2}) = y$

$\Rightarrow (y - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ نأخذ أحد العوامل المتكررة

iii) $3 - 6\sqrt{3}z + 9z^2 = 0$

الحد الأوسط $2 \times (\sqrt{3} \times 3z) = 6\sqrt{3}z$

$\Rightarrow (\sqrt{3} - 3z)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{3} - 3z = 0 \Rightarrow 3z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ نأخذ أحد العوامل المتكررة

Solving quadratic equations by completing the square

الآن سوف نتعرف إلى كيفية حل معادلة من الدرجة الثانية بطريقة إكمال المربع:

- (1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة $-c = ax^2 + bx$ ، حيث $a \neq 0$.
- (2) إذا كان $a \neq 1$ فنقسم المعادلة على a .
- (3) نضيف إلى طرفي المعادلة المقدار (مربع نصف معامل x) .
- (4) نحلل الطرف الأيسر الذي أصبح مربعاً كاملاً بعد الخطوة 3 ، ونبسّط الطرف الأيمن.
- (5) نأخذ الجذر التربيعي للطرفين ونجد قيم x .

مثال (3) حل المعادلات التالية بطريقة إكمال المربع:

i) $x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 12$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 12 + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 16 \Rightarrow (x - 2)^2 = 16$$

$$\Rightarrow x - 2 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6 \\ \text{or } x - 2 = -4 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \Rightarrow S = \{6, -2\}$$

نكتب المعادلة كما في الخطوة الأولى

إضافة المقدار $(\frac{1}{2} \times -4)^2 = 4$ إلى طرفي المعادلة

نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

ii) $2y^2 - 3 = 3y \Rightarrow 2y^2 - 3y = 3$

$$\Rightarrow y^2 - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}$$

بقسمة طرفي المعادلة على 2

$$\Rightarrow y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = \frac{3}{2} + \frac{9}{16}$$

إضافة المقدار $(\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{16}$ إلى طرفي المعادلة

$$\Rightarrow (y - \frac{3}{4})^2 = \frac{33}{16}$$

بتحليل الطرف الأيسر ونبسّط الطرف الأيمن للمعادلة

$$\Rightarrow y - \frac{3}{4} = \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$$

نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

$$\Rightarrow \begin{cases} y - \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \\ \text{or } y - \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{3 - \sqrt{33}}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \frac{3 - \sqrt{33}}{4}, \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \right\}$$

مثال (4)

مستطيل يزيد طوله على عرضه بمقدار 2cm ، قدر طول المستطيل وعرضه بالتقريب لأقرب عدد صحيح إذا كانت مساحته 36cm^2 .

نفرض عرض المستطيل بالمتغير x فيكون طول المستطيل هو $x + 2$

$$x(x + 2) = 36$$

والمعادلة التي تمثل المسألة:

$$\Rightarrow x^2 + 2x = 36$$

نحل المعادلة بطريقة إكمال المربع

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 36 + 1$$

نضيف $1 = (\frac{1}{2} \times 2)^2$ إلى طرفي المعادلة

$$\Rightarrow (x + 1)^2 = 37 \Rightarrow x + 1 = \pm \sqrt{37} \Rightarrow x + 1 \approx \pm 6$$

$$\sqrt{37} \approx \sqrt{36}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 \approx 6 \Rightarrow x \approx 5 \\ \text{or } x + 1 \approx -6 \Rightarrow x \approx -7 \end{cases} \text{ يهمل}$$

لذا عرض المستطيل التقريبي 5cm وطوله 7cm

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

1 $x^2 + 12x + 36 = 0$

3 $4x^2 - 4x + 1 = 0$

5 $x^2 + 16x = -64$

2 $y^2 - 10y + 25 = 0$

4 $y^2 + 2\sqrt{7}y + 7 = 0$

6 $\frac{1}{16} - \frac{1}{2}x + x^2 = 0$

الأسئلة (1 - 6)

مشابهة للمثال (2)

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

7 $x^2 - 10x - 24 = 0$

9 $4x^2 - 3x - 16 = 0$

11 $x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{1}{5}$

8 $y^2 - 3 = 2y$

10 $3y^2 + 2y = 1$

12 $5y^2 + 15y - 30 = 0$

الأسئلة (7 - 12)

مشابهة للمثال (3)

تدرب وحل التمرينات

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

13 $x^2 + 24x + 144 = 0$

15 $y^2 + 4\sqrt{2}y + 8 = 0$

17 $3y^2 + 36 - 12\sqrt{3}y = 0$

14 $y^2 - 20y + 100 = 0$

16 $7 - 2\sqrt{7}z + z^2 = 0$

18 $9z^2 - 10z + \frac{25}{9} = 0$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

19 $y^2 + 2\sqrt{3}y = 3$

21 $x^2 - 2x = 0$

23 $x^2 - \frac{2}{3}x = 4$

20 $4z^2 - 12z - 27 = 0$

22 $y^2 - 8y = 24$

24 $8y^2 + 16y - 64 = 0$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع، وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح:

25 $x^2 - 6x = 15$

26 $y(2y + 28) = 28$

27 $z^2 - 10z + 10 = 0$



28 **مدينة بابل:** مدينة بابل باللاتينية Babylon هي مدينة عراقية كانت تقع على نهر الفرات، وكانت عاصمة البابليين أيام حكم حمورابي سنة (1750 - 1792) قبل الميلاد. جد قيمة x من المعادلة $x^2 - 28x + 196 = 0$ والتي تمثل طول ضلع إحدى القاعات المربعة الشكل.



29 **دب الباندا:** المساحة المخصصة لدب الباندا في حديقة الحيوانات مستطيلة الشكل 126 متراً مربعاً، وعرضها يقل بمقدار 8 متر عن طولها. جد أبعاد المنطقة المخصصة للدب بالتقريب لأقرب عدد صحيح.



30 **حيتان:** تجنح بعض المجموعات من الحيتان إلى الشاطئ ولا يوجد تفسير علمي لهذه الظاهرة، ويحاول حماة البيئة إرجاعها إلى البحر. حل المعادلة $x^2 + 20x = 525$ بطريقة إكمال المربع لإيجاد قيمة x التي تمثل عدد الحيتان التي جنحت إلى أحد شواطئ استراليا.

فكر

31 **تحذ:** حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع، وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح:

i) $4x(x - 6) = 27$

ii) $6y^2 - 48y = 6$

32 **أصح الخطأ:** حلت سوسن المعادلة $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ بطريقة إكمال المربع وكتبت مجموعة الحل للمعادلة بالشكل الآتي: $S = \{\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\}$. اكتشف خطأ سوسن وصححه.

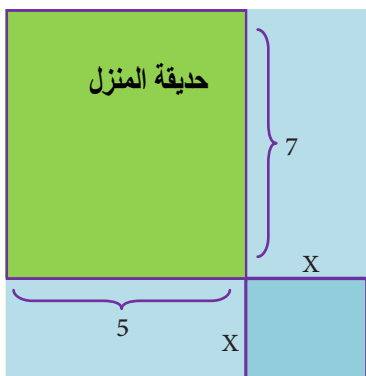
33 **حس عددي:** هل ان مجموعة حل للمعادلة $y^2 - 4y + 4 = 0$ تحتوي على قيمتين متساويتين بالمقدار أحدهما سالبة والأخرى موجبة؟ وضّح إجابتك.

أكتب

$\frac{1}{81} - \frac{2}{9}z + z^2 = 0$

مجموعة الحل للمعادلة:

Using General Law to solve the Equations



تعلم

أريدَ رصْفُ ممرٍّ على جانبي حديقة منزل بالسيراميك طول الحديقة 7m وعرضها 5m ، ومساحة الرصف 45m². جد عرض الممر المطلوب رصفه بالسيراميك.

فكرة الدرس

• حل المعادلات من الدرجة الثانية بالقانون العام.

المفردات

- معامل
- الحد المطلق
- القانون العام

[3-5-1] حل المعادلات باستعمال القانون $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ وأن $a \neq 0$

Solving the equations by using the law $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ and $a \neq 0$

تعلمت في الدروس السابقة كيفية حل معادلة من الدرجة الثانية بطرائق عدة، ولكن هنالك معادلات لا يمكن حلها بالطرائق السابقة، فسوف نحلها بطريقة القانون العام (الدستور) وذلك لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية وكما يأتي:

- (1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة العامة (القياسية) $ax^2 + bx + c = 0$.
- (2) نكتب قيم المعاملات: a معامل x^2 ، b معامل x مع إشارته، c الحد المطلق مع إشارته.
- (3) نعوض بالقانون العام لإيجاد قيمتي المتغير.

مثال (1) من فقرة تعلم، ما عرض الممر المطلوب رصفه على جانبي الحديقة؟

على فرض أن عرض الممر هو x ، فإن مساحة الجزء الأيمن من الممر $= 7x$ ،

ومساحة الجزء الممر الأمامي $= 5x$ ، ومساحة زاوية الممر $= x^2$ ومجموع مساحتي الرصف $45m^2$.

$$x^2 + 7x + 5x = 45 \Rightarrow x^2 + 12x = 45$$

المعادلة التي تمثل المسألة

$$x^2 + 12x - 45 = 0$$

وضع المعادلة بالصورة العامة

$$a = 1, b = 12, c = -45$$

تعيين المعاملات والتعويض بالقانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \times 1 \times (-45)}}{2 \times 1} \Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 180}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{324}}{2} \Rightarrow x = \frac{-12 \pm 18}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-12 + 18}{2} \Rightarrow x = 3 \\ \text{or } x = \frac{-12 - 18}{2} \Rightarrow x = -15 \end{cases}$$

عرض الممر 3m

يُهمل غير ممكن

مثال (2) جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

$$x^2 - 3x - 5 = 0, a = 1, b = -3, c = -5$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{29}}{2} \\ \text{or } x = \frac{3 - \sqrt{29}}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{29}}{2}, \frac{3 - \sqrt{29}}{2} \right\}$$

The discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$)

تعلمت في الجزء الأول من هذا الدرس كيفية حل المعادلة بالقانون العام لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة. والآن سوف نتطرق إلى مميز المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ وهو $\Delta = b^2 - 4ac$ ، وإن نوع جذري المعادلة يتعين كما يأتي:

- | $\Delta = b^2 - 4ac$ | نوع الجذرين |
|----------------------------|---|
| 1) موجب ومربع كامل | جذران حقيقيان نسبتيان (المعاملات أعداد نسبية) |
| 2) موجب وليس مربعاً كاملاً | جذران حقيقيان غير نسبتيين |
| 3) صفر | جذران حقيقيان متساويان $(\frac{-b}{2a})$ |
| 4) سالب | جذران غير حقيقيين (مجموعة الحل في $\emptyset = R$) |

مثال (3) حدّد جذري المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

i) $2x^2 + 3x - 2 = 0$, $a = 2$, $b = 3$, $c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 9 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$

المقدار المميز مربع كامل أي للمعادلة جذران نسبتيان

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow x = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2}$ or $x = \frac{-3 - 5}{4} = -2$

ii) $y^2 - 4y - 9 = 0$, $a = 1$, $b = -4$, $c = -9$

المقدار المميز ليس مربعاً كاملاً لذا للمعادلة جذران غير نسبتيين

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 16 - 4 \times 1 \times (-9) = 52$

$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 36}}{2} \Rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{2} \Rightarrow y = 2 + \sqrt{13}$ or $y = 2 - \sqrt{13}$

iii) $z^2 + 8z = -16 \Rightarrow z^2 + 8z + 16 = 0$, $a = 1$, $b = 8$, $c = 16$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 64 - 4 \times 1 \times 16 = 0$

قيمة المقدار المميز صفر أي المعادلة لها جذران حقيقيان متساويان

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = -4$

يمكن تطبيق القانون $(\frac{-b}{2a})$ مباشرة

iv) $x^2 - 2x + 10 = 0$, $a = 1$, $b = -2$, $c = 10$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4 - 4 \times 1 \times 10 = -36$

قيمة المقدار المميز سالب ولذلك المعادلة ليس لها حل في R

مثال (4)

ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k+1)x + 4 = 0$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.

يكون جذرا المعادلة متساويين عندما قيمة المقدار المميز Δ يساوي صفر.

$a = 1$, $b = -(k+1)$, $c = 4$

نحدد قيم المعاملات

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (k+1)^2 - 4 \times 1 \times 4 \Rightarrow \Delta = (k+1)^2 - 16$

$\Delta = 0 \Rightarrow (k+1)^2 - 16 = 0$

نعوض عن قيمة المميز بصفر وذلك لتساوي جذري المعادلة

$\Rightarrow (k+1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (k+1)^2 = 16$

بجذر طرفي المعادلة

$\Rightarrow k + 1 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} k + 1 = +4 \Rightarrow k = 3 \\ \text{or } k + 1 = -4 \Rightarrow k = -5 \end{cases}$

التحقق: نعوض بقيمة $k = 3$ بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة:

$x^2 - (k+1)x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$

نعوض بقيمة $k = -5$ بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة:

$x^2 - (k+1)x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$

تأكّد من فهمك

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

1 $x^2 - 4x - 5 = 0$

2 $y^2 + 5y - 1 = 0$

3 $3x^2 - 9x = -2$

4 $4y^2 + 8y = 6$

5 $4x^2 - 12x + 9 = 0$

6 $2y^2 - 3 = -5y$

الأسئلة (1 - 6)

مشابهة للمثالين (1،2)

حدّد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

7 $2x^2 + 3x = 5$

8 $3x^2 - 7x + 6 = 0$

الأسئلة (7 - 10)

9 $y^2 - 2y + 1 = 0$

10 $y^2 + 12 = -9y$

مشابهة للمثال (3)

11 ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k + 2)x + 36 = 0$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.

12 ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $4y^2 + 25 = (k - 5)y$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.

13 ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $z^2 + 16 = (k + 4)z$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.

14 بيّن أنّ المعادلة $z^2 - 6z + 28 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

الأسئلة (11 - 14)

مشابهة للمثالين (3،4)

تدرب وحلّ التمرينات

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

15 $x^2 - 7x - 14 = 0$

16 $y^2 + 3y - 9 = 0$

17 $2x^2 - 8(3x + 2) = 0$

18 $2y^2 - 2 = -10y$

حدّد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

19 $x^2 + 4x = 5$

20 $y^2 - 2y - 10 = 0$

21 $2x^2 - 5x + 7 = 0$

22 $y^2 - 14y + 49 = 0$

23 ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k + 6)x + 49 = 0$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.

24 ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $4y^2 + 36 = (k - 6)y$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.

25 ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $z^2 + 81 = (k + 9)z$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.

26 بيّن أنّ المعادلة $2z^2 - 3z + 10 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.



27 **ألعاب نارية:** في إحدى المناسبات أطلقت مجموعة من الألعاب النارية عمودياً في الهواء وصلت إلى ارتفاع 140m. احسب الزمن (t ثانية) الذي وصلت به إلى هذا الارتفاع من المعادلة التالية: $5t^2 + 60t = 140$



28 **تجارة:** يحسب سامر سعر الكلفة للبدلة الرجالية الواحدة ثم يضيف عليها مبلغ للربح ويبيعها للزبائن بمبلغ 120 ألف دينار، إذا كانت p في المعادلة $p^2 - 30p + 225 = 0$ تمثل مبلغ ربح سامر في البدلة الواحدة بألف الدينانير، فما سعر كلفة البدلة الواحدة؟

فكر

29 **تحذ:** حدد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

i) $x^2 + 8x = 10$

ii) $3y^2 - 6y - 42 = 0$

30 **أصح الخطأ:** قال سعد إن المعادلة $2x^2 - 3x - 9 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية. اكتشف خطأ سعد وصححه.

31 **حس عددي:** استعملت مروة المقدار المميز لكتابة جذري المعادلة $z^2 - 8z + 16 = 0$ دون تحليلها. فسّر كيف استطاعت مروة كتابة جذري المعادلة.

أكتب

نوع جذري المعادلة $x^2 + 100 = 20x$ باستعمال المقدار المميز دون حلها.

Solving the Rational Equations



تعلم

إذا كان ثمن شراء التحفية الواحدة بدلالة المتغير x هو $2x + 3$ ألف دينار و ثمن شراء ست تحفيات أيضاً بدلالة x هو $x^2 + 3x - 1$ ألف دينار، فإذا كانت نسبة ثمن تحفية واحدة إلى ثمن ثلاث تحفيات $\frac{1}{3}$ ، فما ثمن شراء تحفية واحدة؟

فكرة الدرس

• حل المعادلات الكسرية من الدرجة الثانية.

المفردات

- بسط الكسر
- مقام الكسر
- معادلة كسرية

تعرفت سابقاً إلى كيفية تبسيط المقادير الجبرية النسبية (الكسرية) وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على عامل مشترك، والآن سوف نستعمل تحليل المقادير الجبرية لحل المعادلات الكسرية التي في مقامها متغير وذلك بالتخلص من الكسور ثم حلها بإحدى الطرائق التي تعلمتها سابقاً.

اكتب ثمن شراء التحفية الواحدة.

مثال (1)

$$\frac{\text{ثمن تحفية واحدة}}{\text{ثمن ثلاث تحفيات}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x - 1)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 1 = 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \\ \text{or } x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

إذن ثمن شراء تحفية واحدة هو $(2x + 3 = 13)$ ثلاثة عشر ألف دينار

تبسيط الكسر بضرب الطرفين في الوسطين

تبسيط المعادلة لتحليلها

يهمل لايوجد سعر بالسالب

جد مجموعة الحل للمعادلة التالية، ثم تحقق من صحة الحل:

مثال (2)

$$5x + \frac{x-2}{3x} = \frac{2}{3}$$

نضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر (LCM) للتخلص من الكسور

$$3x(5x) + 3x\left(\frac{x-2}{3x}\right) = 3x\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 15x^2 + x - 2 = 2x \Rightarrow 15x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (3x + 1)(5x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ \text{or } 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right\}$$

مجموعة الحل

التحقق: نعوض بالمعادلة الأصلية عندما $x = -\frac{1}{3}$:

$$L.S = 5\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{-\frac{1}{3} - 2}{3 \times -\frac{1}{3}} = -\frac{5}{3} + \frac{-1}{3} + 2 = -\frac{5}{3} + \frac{1}{3} + 2 = \frac{-5 + 1 + 6}{3} = \frac{2}{3} = R.S$$

كذلك من السهل التحقق عندما $x = \frac{2}{5}$ (تترك للطالب)

تعلمت سابقاً كيفية تبسيط جمع المقادير الجبرية النسبية (الكسرية) وطرحها وذلك بتحليل كل من بسط ومقام الكسر إلى أبسط صورة ثم إجراء عملية جمع وطرح المقادير الكسرية باستعمال المضاعف المشترك الأصغر وتبسيط المقدار على أبسط صورة (simplest form)، والآن سوف تستعمل ذلك في حل المعادلات الكسرية لإيجاد مجموعة حلول المعادلة الكسرية .

مثال (3) جد مجموعة الحل للمعادلة:

$$\frac{x}{x-3} + \frac{4x}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x-3} + \frac{4x}{x+3} = \frac{18}{(x-3)(x+3)}$$

نحلل المقامات إلى أبسط صورة ممكنة

$$\Rightarrow x(x+3) + 4x(x-3) = 18$$

بضرب طرفي المعادلة في LCM (x-3)(x+3)

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 4x^2 - 12x - 18 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 9x - 18 = 0$$

تبسيط المعادلة وحلها لإيجاد قيم المتغير

$$\Rightarrow (5x+6)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -\frac{6}{5} \text{ or } x = 3$$

ملاحظة: يجب استبعاد القيم التي تجعل مقام أي حد كسري من حدود المعادلة الأصلية صفراً لأنه يؤدي إلى القسمة على صفر وهذا غير جائز.

ولذا نستبعد $x = 3$ من الحل لأن $(\frac{x}{x-3} = \frac{3}{0})$ ، ويكون الحل فقط هو $x = -\frac{6}{5}$

التحقق: نعوض بالمعادلة الأصلية $x = -\frac{6}{5}$ ونرى إن كان طرفا المعادلة متساويين أم لا؟

$$L.S = \frac{x}{x-3} + \frac{4x}{x+3} = \frac{-\frac{6}{5}}{-\frac{6}{5}-3} + \frac{4 \times -\frac{6}{5}}{-\frac{6}{5}+3} = \frac{6}{21} - \frac{8}{3} = -\frac{50}{21}$$

$$R.S = \frac{18}{x^2-9} = \frac{18}{(-\frac{6}{5})^2-9} = \frac{18}{\frac{36}{25}-9} = -\frac{450}{189} = -\frac{50}{21}$$

لذا قيمة $x = -\frac{6}{5}$ تحقق المعادلة $L.S = R.S$

مثال (4) جد مجموعة الحل للمعادلة:

$$\frac{2}{x+2} - \frac{x}{2-x} = \frac{x^2+4}{x^2-4}$$

قبل ضرب طرفي المعادلة في LCM للمقامات نحاول

$$\Rightarrow \frac{2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)}$$

تحليل مقام الكسر للطرف الأيمن وتغيير $2-x = -(x-2)$

باستعمال المعلومة $a-b = -(b-a)$

$$\Rightarrow 2(x-2) + x(x+2) = x^2+4$$

بضرب طرفي المعادلة في LCM (x+2)(x-2)

$$\Rightarrow 2x-4+x^2+2x-x^2-4=0 \Rightarrow 4x-8=0 \Rightarrow x=2$$

عند التعويض عن $x = 2$ بالمعادلة الأصلية نحصل على عملية قسمة على صفر وهذا غير جائز $(\frac{x}{2-x} = \frac{2}{0})$

لذلك المعادلة ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، أي مجموعة الحل في R هي مجموعة خالية ($\emptyset$).

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

1 $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{6}{4x^2}$

2 $\frac{y}{2} - \frac{7}{5} = \frac{3}{10y}$

3 $\frac{x+4}{2} = \frac{-3}{2x}$

4 $\frac{y+1}{y^2} = \frac{3}{4}$

5 $\frac{9x-14}{x-5} = \frac{x^2}{x-5}$

6 $\frac{1}{y^2-6} = \frac{2}{y+3}$

الأسئلة (1 - 6)
مشابهة للمثالين (1,2)

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية:

7 $\frac{y-4}{y+2} - \frac{2}{y-2} = \frac{17}{y^2-4}$

8 $\frac{9}{x^2-x-6} - \frac{5}{x-3} = 1$

9 $\frac{12}{y^2-16} + \frac{6}{y+4} = 2$

10 $\frac{2x}{x+1} + \frac{3x}{x-1} = \frac{8+7x+3x^2}{x^2-1}$

الأسئلة (7 - 10)
مشابهة للمثالين (3,4)

تدرب وحل التمرينات

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

11 $\frac{4}{6x^2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{x}$

12 $\frac{3y}{4} - \frac{6}{12y} + \frac{1}{4} = 0$

13 $\frac{9x+22}{x^2} = 1$

14 $\frac{9}{(y+2)^2} = \frac{3y}{y+2}$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية:

15 $\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x-3} = 1$

16 $\frac{y-5}{y+5} - \frac{y+5}{y-5} = \frac{4y^2-24}{y^2-25}$

17 $\frac{6-x}{x^2+x-12} - \frac{2}{x+4} = 1$

18 $\frac{4+8y}{y^2-9} + \frac{6}{y-3} = 3$



19 **رياضة:** إذا أراد راكب دراجة قطع مسافة 60 km بين مدينتين A, B بسرعة معينة، ولو زادت سرعته بمقدار 10 km/h لتمكن من قطع هذه المسافة بزمن يقل ساعة واحدة عن الزمن الأول. جد سرعته أولاً.



20 **نقل مسافرين:** تقطع طائرة الخطوط الجوية العراقية المسافة 350 km بين مدينة بغداد وأربيل بسرعة معينة، ولو زادت سرعة الطائرة بمقدار 100 km/h لتمكنّت الطائرة من قطع المسافة بزمن يقل 12 دقيقة عن الزمن الأول. جد سرعة الطائرة التقريبية أولاً.

21 **سباق:** شارك نوفل في سباق ثلاثي، وتضمن السباق السباحة وركوب الدراجة والجري، واستغرق ساعتين لإنهاء السباق كما موضح في الجدول المجاور على اعتبار x تعبر عن معدل سرعته في السباحة. جد معدل سرعته التقريبية في سباق السباحة.

الزمن	السرعة km/h	المسافة km	
t_s	x	$d_s = 1$	السباحة
t_b	$5x$	$d_b = 20$	ركوب الدراجة
t_r	$x + 4$	$d_r = 4$	الجري

ملاحظة: استعمل معادلة الزمن الإجمالي الذي استغرقه نوفل في السباق بدلالة سرعته في السباحة هو:

$$T(x) = t_s + t_b + t_r$$

فكّر

22 **تحذّر:** جد مجموعة الحل للمعادلة التالية:

$$\frac{3}{x+5} + \frac{4}{5-x} = \frac{x^2 - 15x + 14}{x^2 - 25}$$

23 **أصحّ الخطأ:** استعمل نمير المقدار المميز لبيان جذور المعادلة:

$$\frac{2}{x-7} \times \frac{1}{x-1} = 1$$

فقال نمير أنّ للمعادلة جذران نسبتيان حقيقيان. اكتشف خطأ نمير وصحّحه.

أكتب

مجموعة الحل في مجموعة الأعداد الحقيقية :

$$\frac{1}{x+6} - \frac{5}{x-6} = 2$$



تعلم

تقطع باخرة شحن مسافة 240 km بين الميناء A والميناء B بسرعة معينة، ولو زادت سرعتها 10 km/h لتمكنت من قطع المسافة بزمان يقل ساعتين عن الزمن الأول. جد سرعة الباخرة أولاً.

فكرة الدرس

- استعمال استراتيجية كتابة معادلة لحل المسألة.

افهم

ما المعطيات في المسألة؟ باخرة شحن تقطع المسافة 240km بين المدينة A والمدينة B بسرعة معينة، وتقطعها بزمان يقل ساعتين عن الزمن الأول في حالة زادت سرعتها بمقدار 10 km/h .
ما المطلوب من المسألة؟ إيجاد سرعة الباخرة أولاً.

خطّ

كيف تحل المسألة؟ أكتب معادلة تمثل المسألة ثم أحلها لإيجاد سرعة الباخرة أولاً.

حل

نفرض أن سرعة الباخرة الأولى = v ، الزمن الأول = $\frac{240}{v}$
لذا سرعتها الثانية = $v + 10$ ، الزمن الثاني = $\frac{240}{v + 10}$
الزمن الأول - الزمن الثاني يساوي 2
$$\frac{240}{v} - \frac{240}{v + 10} = 2$$

بضرب طرفي المعادلة في LCM $v(v + 10)$
$$240v + 2400 - 240v = 2v(v + 10)$$

$$2400 = 2v^2 + 20v$$

$$v^2 + 10v - 1200 = 0 \Rightarrow (v + 40)(v - 30) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v + 40 = 0 \Rightarrow v = -40 \\ \text{or } v - 30 = 0 \Rightarrow v = 30 \text{ km/h} \end{cases}$$

يهمل
سرعة الباخرة أولاً

تحقق

الزمن الباخرة الأولى $\frac{240}{v} = \frac{240}{30} = 8h$

الزمن الباخرة الثانية $\frac{240}{v + 10} = \frac{240}{40} = 6h$

الزمن الباخرة الثانية أقل من زمن الباخرة الأولى بمقدار ساعتين ($8 - 6 = 2h$) ، لذا الحل صحيح.

حل المسائل التالية باستراتيجية (كتابة معادلة)



- 1 **نافورة:** زُرعت منطقة مربعة الشكل طول ضلعها 4m بالورد وسط حديقة فندق مربعة الشكل، فكانت مساحة المنطقة المتبقية من الحديقة المحيطة بها 84 m^2 . ما طول ضلع الحديقة؟



- 2 **أسد بابل:** وهو تمثال لأسد عُثِرَ عليه في مدينة بابل الأثرية في العراق في سنة 1776، وهو مصنوع من حجر البازلت الأسود الصلب، وموضوع على منصة منتصف منطقة مستطيلة الشكل طولها يزيد على عرضها بمقدار 2m ومساحتها 15 m^2 . فما أبعادها؟



- 3 **الأسد:** وهو من أقوى الحيوانات الموجودة على وجه الأرض ويُلقَّب الأسد بملك الغابة نسبةً إلى قوّته بين الحيوانات في الغابة، إذا كانت المعادلة $x^2 - 30x$ تمثل المساحة التي يسيطر الأسد سيطرته عليها بالكيلومتر. ما طول ضلع المنطقة التي يمثلها المتغير x إذا كانت المساحة 175 كيلومتر مربع؟



- 4 **ألعاب نارية:** في إحدى المناسبات أُطلقت مجموعة من الألعاب النارية عمودياً في الهواء وصلت إلى ارتفاع 200m. احسب الزمن الذي وصلت به إلى هذا الارتفاع، إذا كانت المعادلة الآتية $2t^2 + 30t = h$ تمثل العلاقة بين الارتفاع بالأمتار (h) الذي تصل إليه الألعاب النارية بعد t ثانية.

English	عربي	English	عربي
coefficient	معامل	linear equation	معادلة خطية
absolute term	الحد المطلق	system of equations	نظام معادلات
absolute value	القيمة المطلقة	solution set	مجموعة الحل
general law	القانون العام	quadratic equation	معادلة تربيعية
discernment	المقدار المميز	factoring	تحليل
nominator	بسط الكسر	one variable	متغير واحد
dominator	مقام الكسر	probe and error factoring	التحليل بالتجربة
right side	الطرف الأيمن	the first term	الحد الأول
left side	الطرف الأيسر	the middle term	الحد الأوسط
rational equation	معادلة كسرية	the last term	الحد الأخير
plan	خطة	perfect square	مربع كامل
problem	مسألة	completing the square	إكمال مربع
linear equations system	أنظمة معادلات خطية	difference between two squares	فرق بين مربعين
		least common multiple	مضاعف مشترك أصغر

حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين

الدرس [3-1]

تدريب: جد مجموعة الحل للنظام باستعمال الحذف لكل مما يأتي :

$$x + y = 2 \quad \dots (1)$$

$$x + 5y = 4 \quad \dots (2)$$

.....
.....

مثال: جد مجموعة الحل للنظام باستعمال الحذف لكل مما يأتي :

$$x + 3y = 7 \quad \dots (1)$$

$$x - 3y = 1 \quad \dots (2)$$

بجمع المعادلتين

$$2x = 8 \Rightarrow x = 4 \quad \text{نعوض } x \text{ إحدى المعادلتين}$$

$$x + 3y = 7 \Rightarrow 4 + 3y = 7 \Rightarrow y = 1$$

لذا مجموعة الحل للنظام هي $\{(4, 1)\}$

حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

الدرس [3-2]

تدريب 1: حل المعادلة التالية باستعمال الفرق بين مربعين:

$$x^2 - 64 = 0$$

.....
.....

تدريب 2: حل المعادلة التالية باستعمال خاصية الجذر التربيعي:

$$y^2 = 49$$

.....
.....

مثال 1: حل المعادلة التالية باستعمال الفرق بين مربعين:

$$25 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow (5+x)(5-x)=0 \Rightarrow 5+x=0 \text{ or } 5-x=0$$

$$\Rightarrow x = -5 \text{ or } x = 5$$

$$S = \{-5, 5\}$$

مجموعة الحل

مثال 2: حل المعادلة التالية باستعمال خاصية الجذر التربيعي:

$$y^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow y = \pm \frac{4}{5}$$

$$S = \{\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}\}$$

مجموعة الحل

تدريب 1: حل المعادلة التالية بالتحليل بالتجربة:

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

.....
.....
.....

تدريب 2: حل المعادلة التالية بالتحليل بالتجربة:

$$4y^2 + 16y - 9 = 0$$

.....
.....
.....

مثال 1: حل المعادلة التالية بالتحليل بالتجربة:

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

بما أن إشارة الحد المطلق سالبة فإن إشارة القوسين مختلفة، وإشارة السالب للأكبر

$$\Rightarrow (x - 5)(x + 3) = 0 \quad x = 5 \text{ or } x = -3$$

$$\Rightarrow S = \{5, -3\} \quad \text{مجموعة الحل}$$

مثال 2: حل المعادلة التالية بالتحليل بالتجربة:

$$3y^2 - 11y + 10 = 0 \Rightarrow (3y - 5)(y - 2) = 0$$

$$-6y - 5y = -11y \quad \text{الحد الأوسط}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{3} \\ \text{or } y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \frac{5}{3}, 2 \right\} \quad \text{مجموعة الحل}$$

تدريب 1: حل المعادلة التالية بالمربع الكامل:

$$4x^2 - 28x + 49 = 0$$

.....
.....

تدريب 2: حل المعادلة التالية بطريقة إكمال المربع:

$$x^2 - 12x = 28$$

.....
.....
.....
.....
.....

مثال 1: حل المعادلة التالية بالمربع الكامل:

$$9x^2 - 36x + 36 = 0$$

$$2 \times (3x \times 6) = 36x \quad \text{الحد الأوسط}$$

$$\Rightarrow (3x - 6)^2 = 0 \Rightarrow 3x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \quad \text{نأخذ أحد العوامل المتكررة}$$

مثال 2: حل المعادلة التالية بطريقة إكمال المربع:

$$x^2 - 6x = 27$$

$$\text{إضافة المقدار } 9 = \left(\frac{1}{2} \times -6\right)^2 \text{ إلى طرفي المعادلة}$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 27 + 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 36 \Rightarrow (x - 3)^2 = 36$$

نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

$$\Rightarrow x - 3 = \pm \sqrt{36} \Rightarrow x - 3 = \pm 6$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 3 = 6 \Rightarrow x = 9 \\ \text{or } x - 3 = -6 \Rightarrow x = -3 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow S = \{9, -3\}$$

تدريب 1: جد مجموعة الحل للمعادلة باستعمال القانون العام:

$$x^2 - 3x - 8 = 0$$

.....
.....
.....

تدريب 2: حدد جذور المعادلة:

$$2x^2 - 7x - 3 = 0$$

.....
.....
.....

مثال 1: جد مجموعة الحل للمعادلة باستعمال القانون العام:

$$x^2 - 5x - 7 = 0, \quad a = 1, \quad b = -5, \quad c = -7$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 28}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{53}}{2} \Rightarrow x = \frac{5 + \sqrt{53}}{2} \text{ or } x = \frac{5 - \sqrt{53}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{53}}{2}, \frac{5 - \sqrt{53}}{2} \right\}$$

مثال 2: حدد جذور المعادلة:

$$3x^2 + 5x - 2 = 0, \quad a = 3, \quad b = 5, \quad c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 25 - 4 \times 3 \times (-2) = 49$$

المقدار المميز مربع كامل أي للمعادلة جذران نسبيا

تدريب: جد مجموعة الحل للمعادلة وتحقق من الحل:

$$\frac{2x}{x-4} + \frac{x}{x+4} = \frac{32}{x^2-16}$$

.....
.....
.....
.....

التحقق:

.....
.....
.....

مثال: جد مجموعة الحل للمعادلة وتحقق من الحل:

$$\frac{x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} = \frac{12}{x^2-1} \quad \text{نحلل المقامات}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} = \frac{12}{(x-1)(x+1)}$$

بضرب طرفي المعادلة في LCM $(x-1)(x+1)$

$$\Rightarrow x(x+1) + 3x(x-1) = 12$$

تبسيط المعادلة وحلها لإيجاد قيم المتغير

$$\Rightarrow x^2 + x + 3x^2 - 3x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (4x+6)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ or } x = 2$$

التحقق: نعوض بالمعادلة الأصلية بإحدى القيم ونترك

الثانية للطالب. نعوض $x = 2$ ونرى إن كان طرفا

المعادلة متساويين أم لا؟

$$\left. \begin{aligned} L.S &= \frac{2}{1} + \frac{6}{3} = 4 \\ R.S &= \frac{12}{3} = 4 \end{aligned} \right\} L.S = R.S$$

جد مجموعة حل للمعادلتين بيانياً:

$$1 \quad \begin{cases} y = 1 + x \\ y = 2 - x \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} y + x = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$$

$$3 \quad \begin{cases} y - x - 5 = 0 \\ y + x - 1 = 0 \end{cases}$$

جد مجموعة الحل للمعادلتين باستعمال التعويض أو الحذف لكل مما يأتي:

$$4 \quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

$$5 \quad \begin{cases} 4x - 2y = -4 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$6 \quad \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

حل المعادلات التالية باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين:

$$7 \quad 9x^2 - 25 = 0$$

$$8 \quad 3y^2 - 12 = 0$$

$$9 \quad (7 - z)^2 - 1 = 0$$

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

$$10 \quad x^2 = 49$$

$$11 \quad 81 - y^2 = 0$$

$$12 \quad z^2 = \frac{36}{9}$$

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

$$13 \quad x^2 + 9x + 18 = 0$$

$$14 \quad z^2 - 2z - 48 = 0$$

$$15 \quad 3x^2 - x - 10 = 0$$

$$16 \quad 7z^2 - 18z - 9 = 0$$

17 ما العدد الذي مربعه ينقص عن أربعة أمثاله بمقدار 3؟

18 حوض سباحة يزيد طوله على مثلي عرضه بمقدار 4m ومساحته 48 m². ما أبعاد المسبح؟

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

$$19 \quad x^2 - 16x + 64 = 0$$

$$20 \quad \frac{1}{9} - \frac{1}{3}z + \frac{1}{4}z^2 = 0$$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

$$21 \quad x^2 - 14x = 32$$

$$22 \quad 4y^2 + 20y - 11 = 0$$

$$23 \quad z^2 - \frac{2}{3}z = 1$$

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

$$24 \quad x^2 - 3x - 7 = 0$$

$$25 \quad 3y^2 - 12y = -3$$

$$26 \quad 5z^2 + 6z = 9$$

حدد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

$$27 \quad 2x^2 + 8x + 8 = 0$$

$$28 \quad y^2 - 6y - 9 = 0$$

$$29 \quad 4z^2 - 3z + 7 = 0$$

30 ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k + 6)x + 9 = 0$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

$$31 \quad \frac{6x}{5} = \frac{5}{6x}$$

$$32 \quad \frac{1}{6y^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{y}$$

$$33 \quad \frac{z + 4}{z^2} = \frac{1}{2}$$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية:

$$34 \quad \frac{4}{x - 5} - \frac{3}{x - 2} = 1$$

$$35 \quad \frac{2y}{y + 2} + \frac{y}{2 - y} = \frac{7}{y^2 - 4}$$

تمريعات الفصول

Multiple choice

الاختيار من متعدد

العلاقات والامتباينات في الأعداد الحقيقية
Relations and Inequalities in Real Numbers

الفصل الأول

المقادير الجبرية
Algebraic Expressions

الفصل الثاني

المعادلات
Equations

الفصل الثالث

Ordering Operations in Real Numbers

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية:

1 $(\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{2} + \sqrt{7}) = \dots$ a) $2+9\sqrt{7}$ b) $2+9\sqrt{2}$ c) $9+2\sqrt{14}$ d) $2+9\sqrt{14}$

2 $(\sqrt{18} - \sqrt{8})(\sqrt[3]{\frac{-27}{125}}) = \dots$ a) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{-3\sqrt{2}}{5}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{-2\sqrt{3}}{5}$

3 $\frac{6\sqrt{50}}{3^3\sqrt{-8}} \div \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = \dots$ a) $\frac{-5}{2}$ b) $\frac{-2}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{-\sqrt{2}}{5}$

4 $\sqrt{8}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - 3\sqrt{6} = \dots$ a) $5 - 4\sqrt{6}$ b) $5 + 4\sqrt{6}$ c) $4 - 5\sqrt{6}$ d) $4 + 5\sqrt{6}$

5 $(-27)^{\frac{1}{3}}(\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{32}) = \dots$ a) $\frac{-5}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{-\sqrt{2}}{5}$

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية:

6 $\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \dots$ a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ c) 1 d) -1

7 $\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \dots$ a) $5 + 6\sqrt{2}$ b) $5 - 6\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{6} - 5$ d) $2\sqrt{6} + 5$

استعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقرباً إلى مرتبتين عشريتين مستعملاً الحاسبة لكل مما يأتي:

8 $(\frac{1}{3})^2 - 3^{-2} - (5)^{\frac{3}{2}} \approx \dots$ a) -18.11 b) 18.11 c) 11.18 d) -11.18

9 $8^{\frac{-1}{3}} - (-7)^0 + \frac{1}{6} \times 4^{\frac{1}{2}} \approx \dots$ a) - 0.16 b) - 0.17 c) 0.16 d) 0.17

استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقرباً لأقرب مرتبتين عشريتين:

10 $(7.46 \times 10^{-2})^2 \approx \dots$ a) 5.56×10^{-5} b) 5.57×10^{-4} c) 5.56×10^{-4} d) 5.57×10^{-5}

Mappings

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

- 1 إذا كان التطبيق $f: A \rightarrow B$ معرف كالاتي $x \rightarrow x + 1$:
 $f: A \rightarrow B$ حيث $A = \{1, 3, 5\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8\}$. فإن مدى التطبيق هو:
 a) $\{2, 4, 8\}$ b) $\{4, 6, 8\}$
 c) $\{2, 4, 6\}$ d) $\{2, 6, 8\}$
- 2 إذا كانت $A = \{1, 2, -2, -3\}$ وكان $g: A \rightarrow Z$. فإن مدى التطبيق إذا كان $g(x) = 5x - 3$ هو:
 a) $\{2, 9, 13, 18\}$ b) $\{2, 7, -13, -18\}$
 c) $\{9, 13, 18, 21\}$ d) $\{7, 13, 15, 18\}$
- 3 إذا كانت $f: Z \rightarrow R$ إذ $f(x) = 3x - 2$. فإن العدد 10 هو صورة للعدد:
 a) 5 b) 4 c) 3 d) 2
- 4 ليكن $f: A \rightarrow B$ إذ $A = \{2, 3, 4, 5\}$ ، $B = \{4, 6, 8\}$. وإن $f = \{(2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 8)\}$ فإن f يمثل تطبيقاً شاملاً لأن:
 a) المدى $\neq$ المجال المقابل b) تطبيق غير متباين
 c) المدى هو مجموعة A d) المدى = المجال المقابل
- 5 إذا كانت $f: Z \rightarrow Z$ إذ $f(x) = 2x - 3$ و $g: Z \rightarrow Z$ إذ $g(x) = x + 1$. فإن التطبيق $(g \circ f)(x)$ هو:
 a) $2x - 2$ b) $2x - 4$ c) $2x + 2$ d) $2x + 4$
- 6 ليكن $f: \{2, 3, 5\} \rightarrow N$ إذ $f(x) = 3x - 1$ وإن $g: N \rightarrow N$ إذ $g(x) = x + 1$ فإن مدى $g \circ f$ هو المجموعة:
 a) $\{5, 8, 14\}$ b) $\{5, 6, 9\}$
 c) $\{6, 12, 15\}$ d) $\{6, 9, 15\}$
- 7 إذا كان التطبيق $f: Q \rightarrow Q$ إذ $f(x) = 4x + 1$ والتطبيق $g: Q \rightarrow Q$ إذ $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$.
 جد قيمة x إذا كانت $(f \circ g)(x) = 45$. فإن قيمة x هي:
 a) ± 5 b) ± 6 c) ± 7 d) ± 8

The Sequences

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات التالية:

- 1 $\{5n - 2\} = \dots$ a) $\{2, 6, 12, 16, 20\}$ b) $\{3, 8, 13, 18, 23\}$
c) $\{4, 8, 12, 18, 22\}$ d) $\{5, 10, 16, 20, 24\}$
- 2 $\{\frac{n}{2} + 1\} = \dots$ a) $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\}$ b) $\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\}$
c) $\{\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\}$ d) $\{2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\}$
- 3 $\{(\frac{-1}{2+n})\} = \dots$ a) $\{\frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{6}\}$ b) $\{\frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{7}\}$
c) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$ d) $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\}$

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الحسابية التالية:

- 4 متتابعة حسابية الحد الثاني فيها 3 وأساسها 3 .
a) $\{0, 3, 6, 9, 12\}$ b) $\{2, 5, 8, 11, 14\}$ c) $\{3, 6, 9, 12, 15\}$ d) $\{1, 4, 7, 10, 13\}$
- 5 متتابعة حسابية الحد الثالث فيها 8 وأساسها 2 .
a) $\{-14, -12, -10, -8, -6\}$ b) $\{-12, -10, -8, -6, -4\}$ c) $\{-10, -8, -6, -4, -2\}$ d) $\{-8, -6, -4, -2, 0\}$
- 6 جد الحد التاسع والحد الخامس عشر للمتتابعة الحسابية التي حدها الثاني 2 وأساسها 2 .
a) $u_9 = 12, u_{15} = 20$ b) $u_9 = 14, u_{15} = 24$ c) $u_9 = 16, u_{15} = 28$ d) $u_9 = 18, u_{15} = 32$
- 7 جد الحدود بين u_2 و u_6 لمتتابعة حسابية حدها الثاني $\frac{9}{5}$ وأساسها 2 .
a) $\{\frac{9}{2}, \frac{19}{2}, \frac{29}{2}\}$ b) $\{\frac{19}{2}, \frac{29}{2}, \frac{39}{2}\}$ c) $\{\frac{9}{5}, \frac{19}{5}, \frac{29}{5}\}$ d) $\{\frac{19}{5}, \frac{29}{5}, \frac{39}{5}\}$

Compound Inequalities

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبرياً:

- 1 $-10 < x$ و $x \leq -2$ a) $\{x: -10 \leq x\} \cap \{x: x \leq -2\}$ b) $\{x: -10 < x\} \cap \{x: x \leq -2\}$
c) $\{x: -10 \leq x\} \cup \{x: x \leq -2\}$ d) $\{x: -10 < x\} \cup \{x: x \leq -2\}$
- 2 $0 \leq y - 3$ و $y - 3 < 12$ a) $\{y: 3 < y < 15\}$ b) $\{y: -3 \leq y \leq 15\}$
c) $\{y: 3 \leq y < 15\}$ d) $\{y: -3 < y < 15\}$
- 3 $16 < 3z + 9$ و $3z + 9 < 30$ a) $\{z: \frac{3}{7} \leq z < 7\}$ b) $\{z: \frac{7}{3} < z \leq 7\}$
c) $\{z: \frac{3}{7} < z < 7\}$ d) $\{z: \frac{7}{3} < z < 7\}$

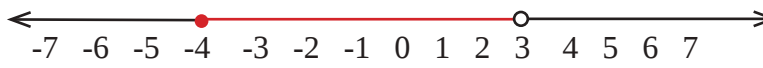
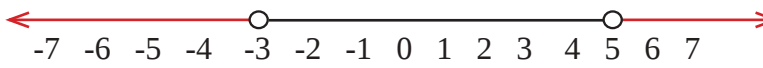
حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً:

- 4 $2t - 4 > -8$ أو $2t - 4 \leq -12$ a) $\{t: t > -2\} \cap \{t: t \leq -4\}$ b) $\{t: t > -2\} \cup \{t: t \leq -4\}$
c) $\{t: t < -2\} \cap \{t: t \geq -4\}$ d) $\{t: t < -2\} \cup \{t: t \geq -4\}$
- 5 $\frac{y+5}{3} < \frac{1}{3}$ أو $\frac{y+5}{3} > \frac{7}{3}$ a) $\{y: y < 4\} \cap \{y: y > 2\}$ b) $\{y: y > -4\} \cup \{y: y < 2\}$
c) $\{y: y < -4\} \cap \{y: y > -2\}$ d) $\{y: y < -4\} \cup \{y: y > 2\}$

اكتب المتباينة المركبة التي تبين مدى طول الضلع الثالث في المثلث إذا كان طول الضلعين الآخرين للمثلث معلومين:

- 6 5cm , 12cm a) $7 < z < 17$ b) $7 \leq z < 17$ c) $7 \leq z \leq 17$ d) $7 < z \leq 17$
- 7 8cm , 2cm a) $6 \leq x < 10$ b) $6 \leq x \leq 10$ c) $6 < x < 10$ d) $6 < x \leq 10$

اكتب المتباينة التي مجموعة الحل لها على مستقيم الأعداد هي:

- 8  a) $-4 < x < 3$ b) $-4 \leq x < 3$ c) $-4 \leq x \leq 3$ d) $-4 < x \leq 3$
- 9  a) $y \leq -3$ أو $y > 5$ b) $y \leq -3$ أو $y \geq 5$ c) $y < -4$ أو $y \geq 5$ d) $y < -3$ أو $y > 5$

Absolute Value Inequalities

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:
حل متباينات القيمة المطلقة الآتية:

- 1) $|y - 8| < 13$ a) $5 < y < -21$ b) $-5 \leq y \leq 21$ c) $-5 < y < 21$ d) $-5 < y \leq 21$
- 2) $|3z| - 7 < 1$ a) $-\frac{8}{3} \leq x < \frac{8}{3}$ b) $-\frac{8}{3} < x \leq \frac{8}{3}$ c) $-\frac{8}{3} \leq x \leq \frac{8}{3}$ d) $-\frac{8}{3} < x < \frac{8}{3}$
- 3) $|3 - x| < 3$ a) $-6 < x < 0$ b) $0 < x < 6$ c) $-6 < x < 6$ d) $0 \leq x \leq 6$
- 4) $|5t - 5| > 0$ a) $t \leq 1$ أو $t > 1$ b) $t \geq 1$ أو $t < -1$
c) $t > 1$ أو $t < 1$ d) $t > -1$ أو $t < -1$
- 5) $|v - 3| \geq \frac{1}{2}$ a) $v \leq \frac{7}{2}$ أو $v \leq \frac{-5}{2}$ b) $v \geq \frac{7}{2}$ أو $v \geq \frac{-5}{2}$
c) $v \geq \frac{7}{2}$ أو $v \leq \frac{5}{2}$ d) $v \leq \frac{7}{2}$ أو $v \geq \frac{-5}{2}$
- 6) $|6 - 3y| \geq 9$ a) $y \leq 1$ أو $y \geq -5$ b) $y < -1$ أو $y > 5$
c) $y > -1$ أو $y < 5$ d) $y \leq -1$ أو $y \geq 5$
- 7) $|\frac{7 - 2y}{3}| \geq 3$ a) $y \leq -1$ أو $y \geq 8$ b) $y < -1$ أو $y \geq 8$
c) $y < -1$ أو $y > 8$ d) $y < -1$ أو $y > 8$
- 8) $|\frac{z - 1}{7}| \leq 2$ a) $-13 < z \leq 15$ b) $-13 \leq z < 15$
c) $-13 \leq z \leq 15$ d) $-13 < z < 15$

Multiplying Algebraic Expressions

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر:

- 1 $(x + 5)^2$ a) $x^2 - 10x + 25$ b) $x^2 + 10x + 25$ c) $x^2 + 5x + 25$ d) $x^2 - 5x + 25$
- 2 $(z - \sqrt{7})^2$ a) $z^2 - 7z + 49$ b) $z^2 + 7y + 49$ c) $z^2 - \sqrt{7}z + 7$ d) $z^2 - 2\sqrt{7}z + 7$
- 3 $(x + 8)(x - 8)$ a) $x^2 - 64$ b) $x^2 + 64$ c) $x^2 + 16$ d) $x^2 - 16$
- 4 $(3 - 2z)(3 + 2z)$ a) $6 - 4z^2$ b) $9 - 4z^2$ c) $6 + 4z^2$ d) $9 + 4z^2$
- 5 $(y + \sqrt{6})(y - \sqrt{6})$ a) $y^2 - \sqrt{12}$ b) $y^2 - 6$ c) $y^2 + \sqrt{12}$ d) $y^2 + 6$
- 6 $(2x - 3)(x + 9)$ a) $2x^2 + 15x - 27$ b) $2x^2 - 5x - 27$ c) $2x^2 - 15x + 27$ d) $2x^2 + 15x + 27$
- 7 $(y - 2)(y^2 + 2y + 4)$ a) $y^3 + 8$ b) $y^3 - 8$ c) $y^3 - 4$ d) $y^3 - 16$
- 8 $(\frac{1}{3} - x)(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}x + x^2)$ a) $\frac{1}{27} - x^3$ b) $\frac{1}{27} + x^3$ c) $\frac{1}{9} + x^3$ d) $\frac{1}{9} - x^3$
- 9 $(z - 2)^3$ a) $z^3 + 6z^2 + 12z + 8$ b) $z^3 - 6z^2 + 12z - 8$
c) $z^3 + 6z^2 - 12z - 8$ d) $z^3 - 6z^2 - 12z + 8$
- 10 $(y + \frac{1}{5})^3$ a) $y^3 - \frac{3}{5}y^2 + \frac{3}{25}y - \frac{1}{125}$ b) $y^3 + \frac{3}{5}y^2 - \frac{3}{25}y + \frac{1}{125}$
c) $y^3 + \frac{3}{5}y^2 + \frac{3}{25}y + \frac{1}{125}$ d) $y^3 - \frac{3}{5}y^2 - \frac{3}{25}y - \frac{1}{125}$

Multiple Choice

الاختيار من متعدد

الدرس [2-2] تحليل المقدار الجبري بالعامل المشترك الأكبر

Using Greater Common Factor to factor Algebraic Expression

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF):

1 $12x^3 + 9x^2 - 3x$

a) $3x(4x^2 + 3x + 1)$

b) $3x(4x^2 + 3x - 1)$

c) $9x(3x^2 + x + 1)$

d) $9x(3x^2 + x - 1)$

2 $6y^2(3y - 4) + 36y$

a) $6y(3y^2 + 4y + 6)$

b) $6y(3y^2 + 4y - 6)$

c) $6y(3y^2 - 4y - 6)$

d) $6y(3y^2 - 4y + 6)$

حل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

3 $3z(z - 3) - 7(z - 3)$

a) $(z + 3)(3z - 7)$

b) $(z - 3)(3z + 7)$

c) $(z - 3)(3z - 7)$

d) $(z + 3)(3z + 7)$

4 $\frac{1}{4}(x + 9) - \frac{1}{2}x^2(x + 9)$

a) $(x + 9)(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2)$

b) $(x - 9)(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2)$

c) $(x + 9)(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x^2)$

d) $(x + 9)(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2)$

5 $\sqrt{2}v(x - 1) - \sqrt{3}t(x - 1)$

a) $(x + 1)(\sqrt{2}v - \sqrt{3}t)$

b) $(x - 1)(\sqrt{2}v - \sqrt{3}t)$

c) $(x - 1)(\sqrt{2}v + \sqrt{3}t)$

d) $(x + 1)(\sqrt{2}v + \sqrt{3}t)$

حل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

6 $3y^3 - 9y^2 + 5y - 15$

a) $(y + 3)(3y^2 + 5)$

b) $(y + 3)(3y^2 - 5)$

c) $(y - 3)(3y^2 + 5)$

d) $(y - 3)(3y^2 - 5)$

حل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

7 $20y^3 - 4y^2 + 3 - 15y$

a) $(5y + 1)(4y^2 - 3)$

b) $(5y - 1)(4y^2 + 3)$

c) $(5y - 1)(4y^2 - 3)$

d) $(5y + 1)(4y^2 + 3)$

8 $\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 4 - 2x$

a) $(x - 2)(\frac{1}{6}x^3 - 2)$

b) $(x + 2)(\frac{1}{6}x^3 - 2)$

c) $(x + 2)(\frac{1}{6}x^3 - 2)$

d) $(x - 2)(\frac{1}{6}x^3 + 2)$

Using Special Identities to factor Algebraic Expression

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل كل مقدار جبري من المقادير الجبرية الآتية:

1 $9 - 4x^2$

a) $(3 + 2x)(3 + 2x)$

b) $(3 + 2x)(3 - 2x)$

c) $(9 - x)(9 + 4x)$

d) $(3 + x)(3 - 4x)$

2 $12y^3z - 3yz^3$

a) $3y(2y - z)(y + 2z)$

b) $3z(2y - z)(2y + z)$

c) $3yz(2y - z)(2y + z)$

d) $3yz(y - 2z)(y + 2z)$

3 $\frac{1}{6}x^3 - x\frac{1}{24}$

a) $\frac{x}{6}(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$

b) $\frac{x}{6}(x + \frac{1}{4})(x - \frac{1}{4})$

c) $\frac{x}{3}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$

d) $\frac{x}{6}(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4})(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4})$

4 $4x^2 + 24x + 36$

a) $(x + 6)^2$

b) $(x - 6)^2$

c) $4(x - 3)^2$

d) $4(x + 3)^2$

5 $16 - 8y + y^2$

a) $(4 + 2y)^2$

b) $(4 - 2y)^2$

c) $(4 - y)^2$

d) $(4 + y)^2$

حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعاً كاملاً:

6 $4x^2 - 20x + 25$

a) $2(x)(5) = 10x$ مربع كامل لأن

b) $-2(2x)(5) = -20x$ مربع كامل لأن

c) $-4(x)(5) \neq 10x$ مربع كامل لأن

d) $-4(x)(5) \neq 20x$ ليس مربعاً كاملاً لأن

7 $64 - 48y + 9y^2$

a) $2(4)(3y) \neq -48y$ ليس مربعاً كاملاً لأن

b) $2(8)(4y) = 48y$ مربع كامل لأن

c) $-2(8)(3y) = -48y$ مربع كامل لأن

d) $-4(4)(3y) \neq 48y$ ليس مربعاً كاملاً لأن

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً:

8 $z^2 + \dots + 49$

a) $14z$

b) $-10z$

c) $7z$

d) $-7z$

9 $36 - 24x + \dots$

a) $2x^2$

b) $-2x^2$

c) $4x^2$

d) $-4x^2$

10 $16y^2 + 40y + \dots$

a) 9

b) 25

c) -9

d) -25

Multiple Choice

الاختيار من متعدد

الدرس [2-4] تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

Using Probe and Error to factor Algebraic Expression contains three terms

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

1 $x^2 + 7x + 12$

a) $(x - 3)(x + 4)$

b) $(x + 3)(x + 4)$

c) $(x - 1)(x + 7)$

d) $(x - 3)(x - 4)$

2 $x^2 - 5x - 36$

a) $(x - 6)(x + 6)$

b) $(x + 12)(x - 3)$

c) $(x - 9)(x + 4)$

d) $(x + 9)(x - 4)$

3 $y^2 + 4y - 21$

a) $(y - 7)(y + 3)$

b) $(y + 7)(y - 3)$

c) $(y - 7)(y - 3)$

d) $(y + 7)(y + 3)$

4 $4x^2 + 10x + 6$

a) $(x - 6)(4x + 1)$

b) $(4x + 2)(x - 3)$

c) $(4x - 6)(x - 1)$

d) $(2x + 3)(2x + 2)$

5 $24y^2 - 2y - 1$

a) $(4y - 1)(6y + 1)$

b) $(2y - 1)(12y - 1)$

c) $(4y + 1)(6y - 1)$

d) $(3y - 1)(8y + 1)$

6 $10x^2 - 11x + 1$

a) $(5x - 1)(2x + 1)$

b) $(10x + 1)(x - 1)$

c) $(5x + 1)(2x - 1)$

d) $(10x - 1)(x - 1)$

7 $22 + 3z - 4z^2$

a) $(11 + 4z)(2 - z)$

b) $(22 - 4z)(1 + z)$

c) $(11 - 4z)(2 + z)$

d) $(22 + 8z)(1 - z)$

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

8 $x^2 + 15x + 26 = (x \dots 2)(x \dots 13)$

a) $(x - 2)(x - 13)$

b) $(x - 2)(x + 13)$

c) $(x + 2)(x + 13)$

d) $(x + 2)(x - 13)$

9 $4y^2 - 2y - 12 = (2y \dots 3)(2y \dots 4)$

a) $(2y - 3)(2y + 4)$

b) $(2y + 3)(2y + 4)$

c) $(2y - 3)(2y - 4)$

d) $(2y + 3)(2y - 4)$

10 $48 - 30z + 3z^2 = (6 \dots 3z)(8 \dots z)$

a) $(6 - 3z)(8 - z)$

b) $(6 + 3z)(8 + z)$

a) $(6 - 3z)(8 + z)$

b) $(6 + 3z)(8 - z)$

Multiple Choice

الاختيار من متعدد

الدرس [5-12] تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو فرق بين مكعبين

Using the sum of two cubes or difference between two cubes to factor the Algebraic Expression

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

1 $8 + x^3$

a) $(2 - x)(4 + 2x + x^2)$

b) $(2 + x)(4 - 2x + x^2)$

c) $(2 - x)(4 - 2x + x^2)$

d) $(2 + x)(4 + 2x + x^2)$

2 $8y^3 + 27$

a) $(2y + 3)(4y^2 + 6y + 9)$

b) $(2y - 3)(4y^2 + 6y + 9)$

c) $(2y + 3)(4y^2 - 6y + 9)$

d) $(2y - 3)(4y^2 - 6y + 9)$

3 $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{64}$

a) $(\frac{1}{z} + \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$

b) $(\frac{1}{z} - \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$

c) $(\frac{1}{z} - \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$

d) $(\frac{1}{z} + \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$

4 $\frac{27}{125} + \frac{8}{x^3}$

a) $(\frac{3}{5} - \frac{2}{x})(\frac{9}{25} + \frac{6}{5x} + \frac{4}{x^2})$

b) $(\frac{3}{5} - \frac{2}{x})(\frac{9}{25} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{x^2})$

c) $(\frac{3}{5} + \frac{2}{x})(\frac{9}{25} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{x^2})$

d) $(\frac{3}{5} + \frac{2}{x})(\frac{9}{25} - \frac{6}{5x} - \frac{4}{x^2})$

5 $0.027 + z^3$

a) $(0.03 + z)(0.09 - 0.3z + z^2)$

b) $(0.03 + z)(0.009 - 0.03z + z^2)$

c) $(0.3 + z)(0.9 - 0.3z + z^2)$

d) $(0.3 + z)(0.09 - 0.3z + z^2)$

6 $\frac{8}{y^3} - \frac{1}{27}$

a) $(\frac{2}{y} - \frac{1}{3})(\frac{4}{y^2} - \frac{2}{3y} + \frac{1}{9})$

b) $(\frac{2}{y} + \frac{1}{3})(\frac{4}{y^2} - \frac{2}{3y} + \frac{1}{9})$

c) $(\frac{2}{y} - \frac{1}{3})(\frac{4}{y^2} + \frac{2}{3y} + \frac{1}{9})$

d) $(\frac{2}{y} - \frac{1}{3})(\frac{4}{y^2} + \frac{2}{3y} - \frac{1}{9})$

7 $9 - \frac{1}{3}z^3$

a) $\frac{1}{3}(3 - z)(9 + 3z - z^2)$

b) $\frac{1}{3}(3 - z)(9 + 3z + z^2)$

c) $\frac{1}{3}(3 + z)(9 + 3z + z^2)$

d) $\frac{1}{3}(3 - z)(9 - 3z + z^2)$

8 $0.008x^3 - 1$

a) $(0.02x - 1)(0.04x^2 + 0.002x + 1)$

b) $(0.02x - 1)(0.04x^2 + 0.02x + 1)$

c) $(0.2x + 1)(0.4x^2 - 0.2x + 1)$

d) $(0.2x - 1)(0.04x^2 + 0.2x + 1)$

Simplifying Rational Algebraic Expressions

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

اكتب كل مقدار من المقادير الآتية بأبسط صورة:

- 1 $\frac{x+3}{4x} \times \frac{4x-12}{x^2-9}$ a) $\frac{3}{x}$ b) $\frac{x}{4}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{x}$
- 2 $\frac{y+2}{y^2+2y+4} \times \frac{y^3-8}{y^2-4}$ a) $\frac{1}{y-2}$ b) 1 c) $\frac{1}{y+2}$ d) -1
- 3 $\frac{z^2-2z-15}{9+3z} \times \frac{5}{z^2-25}$ a) $\frac{5}{z+5}$ b) $\frac{3}{5(z+5)}$ c) $\frac{5}{3(z+5)}$ d) $\frac{3}{z+5}$
- 4 $\frac{x^2-49}{2x^2+9x-35} \div \frac{x-7}{4x^2-25}$ a) $x-7$ b) $2x-5$ c) $x+7$ d) $2x+5$
- 5 $\frac{1-z^3}{1+z+z^2} \div \frac{(1-z)^2}{1-z^2}$ a) $1-z$ b) $1+z$ c) $1+z+z^2$ dc) $1-z+z^2$

اكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

- 6 $\frac{2y^2+1}{y^3-1} - \frac{y}{y^2+y+1}$ a) $\frac{y}{y+1}$ b) $\frac{1}{y+1}$ c) $\frac{1}{y-1}$ d) $\frac{y}{y-1}$
- 7 $\frac{5-4z^2}{8z^3+1} + \frac{2z-1}{4z^2-2z+1}$ a) $\frac{2z-1}{(2z+1)(4z^2-2z+1)}$ b) $\frac{2z+1}{(2z+1)(4z^2-2z+1)}$
c) $\frac{2}{(2z+1)(4z^2-2z+1)}$ d) $\frac{4}{(2z+1)(4z^2-2z+1)}$
- 8 $\frac{3}{x-5} - \frac{2}{5-x} - \frac{130+24x+5x^2}{x^3-125}$ a) $\frac{2x}{(x^2+5x+25)}$ b) $\frac{-2x}{(x^2+5x+25)}$
c) $\frac{1}{(x^2+5x+25)}$ d) $\frac{8}{x^2+5x+25}$
- 9 $\frac{3y+1}{y+4} - \frac{y-4}{3y-1} - \frac{10+8y^2}{3y^2+11y-4}$ a) $\frac{5}{(y+4)(3y-1)}$ b) $\frac{3}{(y+4)(3y-1)}$
c) $\frac{-3}{(y+4)(3y-1)}$ d) $\frac{-5}{(y+4)(3y-1)}$

Multiple Choice

الاختيار من متعدد

الدرس [13-1] حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين

Solving the system of two Linear Equations with two variables

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

جد مجموعة حل للنظام بيانياً:

1 $\left. \begin{array}{l} y = 4x - 6 \\ y = x \end{array} \right\}$ a) $\{(-2, -2)\}$ b) $\{(-2, 2)\}$ c) $\{(2, -2)\}$ d) $\{(2, 2)\}$

2 $\left. \begin{array}{l} y = x - 3 \\ y = 3 - x \end{array} \right\}$ a) $\{(-3, 0)\}$ b) $\{(3, 0)\}$ c) $\{(0, -3)\}$ d) $\{(0, 3)\}$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال التعويض لكل مما يأتي:

3 $\left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 26 \\ 5x - 2y = 0 \end{array} \right\}$ a) $\{(2, 5)\}$ b) $\{(-2, -5)\}$ c) $\{(2, -5)\}$ d) $\{(-2, 5)\}$

4 $\left. \begin{array}{l} y = 6x + 12 \\ 3y = 2x - 8 \end{array} \right\}$ a) $\{(-\frac{11}{4}, \frac{9}{2})\}$ b) $\{(\frac{11}{4}, -\frac{9}{2})\}$ c) $\{(-\frac{11}{4}, -\frac{9}{2})\}$ d) $\{(\frac{11}{4}, \frac{9}{2})\}$

5 $\left. \begin{array}{l} \frac{3x}{4} - \frac{y}{2} = 4 \\ \frac{y}{2} - \frac{x}{4} = 2 \end{array} \right\}$ a) $\{(12, -10)\}$ b) $\{(-12, -10)\}$ c) $\{(12, 10)\}$ d) $\{(-12, 10)\}$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال الحذف لكل مما يأتي:

6 $\left. \begin{array}{l} 7x - 4y = 12 \\ 3x - y = 5 \end{array} \right\}$ a) $\{(-\frac{8}{5}, \frac{1}{5})\}$ b) $\{(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5})\}$ c) $\{(\frac{8}{5}, \frac{1}{5})\}$ d) $\{(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5})\}$

7 $\left. \begin{array}{l} 6y - 2x - 8 = 0 \\ y + x - 12 = 0 \end{array} \right\}$ a) $\{(8, -4)\}$ b) $\{(8, 4)\}$ c) $\{(-8, 4)\}$ d) $\{(-8, -4)\}$

8 $\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = 2\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 3\frac{1}{2} \end{array} \right\}$ a) $\{(-2, -6)\}$ b) $\{(-2, 6)\}$ c) $\{(2, -6)\}$ d) $\{(2, 6)\}$

Multiple Choice

الاختيار من متعدد

الدرس [3-2] حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

Solving Quadratic Equations with one variable

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المعادلات التالية باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين:

1 $3x^2 - 12x = 0$ a) $s = \{4, -4\}$ b) $s = \{3, -3\}$ c) $s = \{0, 4\}$ d) $s = \{0, 3\}$

2 $7z^2 - 21 = 0$ a) $s = \{7, -7\}$ b) $s = \{3, -3\}$ c) $s = \{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$ d) $s = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

3 $4(x^2 - 1) - 5 = 0$ a) $s = \{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\}$ b) $s = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ c) $s = \{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$ d) $s = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

4 $(y + 7)^2 - 81 = 0$ a) $s = \{2, -2\}$ b) $s = \{16, -16\}$ c) $s = \{2, -16\}$ d) $s = \{-2, 16\}$

5 $3x^2 - 6 = 0$ a) $s = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ b) $s = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ c) $s = \{6, -6\}$ d) $s = \{2, -2\}$

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

6 $x^2 = 144$ a) $s = \{7, -7\}$ b) $s = \{14, -14\}$ c) $s = \{12, -12\}$ d) $s = \{12, 12\}$

7 $32 - 2y^2 = 0$ a) $s = \{6, 6\}$ b) $s = \{4, -4\}$ c) $s = \{6, -6\}$ d) $s = \{4, 4\}$

8 $5z^2 = 9$ a) $s = \{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\}$ b) $s = \{\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\}$ c) $s = \{\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\}$ d) $s = \{\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\}$

9 $4(y^2 - 1) = 45$ a) $s = \{\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\}$ b) $s = \{\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\}$ c) $s = \{\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}\}$ d) $s = \{\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}\}$

10 $\frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{9}$ a) $s = \{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\}$ b) $s = \{\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\}$ c) $s = \{\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\}$ d) $s = \{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\}$

11 $x^2 - \frac{13}{16} = \frac{3}{16}$ a) $s = \{\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\}$ b) $s = \{\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\}$ c) $s = \{2, -2\}$ d) $s = \{1, -1\}$

Using Probe and Error to solve the Quadratic Equations

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

- 1 $y^2 + 10y + 21 = 0$ a) $s = \{3, -7\}$ b) $s = \{-3, 7\}$ c) $s = \{-3, -7\}$ d) $s = \{3, 7\}$
- 2 $x^2 - 5x - 36 = 0$ a) $s = \{7, -8\}$ b) $s = \{-4, 9\}$ c) $s = \{4, -9\}$ d) $s = \{-4, -9\}$
- 3 $x^2 - 8x - 48 = 0$ a) $s = \{4, 12\}$ b) $s = \{4, -12\}$ c) $s = \{-4, 12\}$ d) $s = \{-4, -12\}$
- 4 $4y^2 + 18y + 18 = 0$ a) $s = \{-3, \frac{3}{4}\}$ b) $s = \{3, \frac{3}{4}\}$ c) $s = \{3, \frac{3}{2}\}$ d) $s = \{-3, \frac{-3}{2}\}$
- 5 $6z^2 + 36z - 42 = 0$ a) $s = \{1, 7\}$ b) $s = \{-1, 7\}$ c) $s = \{-1, -7\}$ d) $s = \{1, -7\}$
- 6 $22 - 20y - 2y^2 = 0$ a) $s = \{11, 1\}$ b) $s = \{1, -11\}$ c) $s = \{11, -1\}$ d) $s = \{-1, -11\}$
- 7 $32 + 12x - 9x^2 = 0$ a) $s = \{\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\}$ b) $s = \{\frac{-4}{3}, \frac{-8}{4}\}$ c) $s = \{\frac{4}{3}, \frac{-8}{3}\}$ d) $s = \{\frac{-4}{3}, \frac{8}{3}\}$

8 ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 42 ؟

- a) $s = \{7, 6\}$ b) $s = \{7, -6\}$ c) $s = \{-7, 6\}$ d) $s = \{-7, -6\}$

9 عدنان حاصل ضربهما 54 ، أحدهما يزيد عن الآخر بمقدار 3 . فما العدنان ؟

- a) $s = \{6, 9\}$ b) $s = \{6, -9\}$ c) $s = \{-6, 9\}$ d) $s = \{-6, -9\}$

10 عدنان حاصل ضربهما 48 ، أحدهما يقل عن الآخر بمقدار 8 . فما العدنان ؟

- a) $s = \{8, 6\}$ b) $s = \{12, -4\}$ c) $s = \{10, 4\}$ d) $s = \{-12, -4\}$

Multiple Choice

الاختيار من متعدد

الدرس [3-4] حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

Using Completing the Square to solve the Quadratic Equations

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

- 1 $x^2 + 6x + 9 = 0$ a) $x = 6$ b) $x = -3$ c) $x = 4$ d) $x = 3$
- 2 $4z^2 - 20z + 25 = 0$ a) $z = \frac{-5}{2}$ b) $z = \frac{-2}{5}$ c) $z = \frac{5}{2}$ d) $z = \frac{2}{5}$
- 3 $\frac{1}{16} - \frac{1}{2}x + x^2 = 0$ a) $y = \frac{1}{4}$ b) $y = \frac{-1}{4}$ c) $y = \frac{1}{2}$ d) $y = \frac{-1}{2}$
- 4 $y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$ a) $y = -3$ b) $y = 3$ c) $y = -\sqrt{3}$ d) $y = \sqrt{3}$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

- 5 $x^2 - 12x = 13$ a) $s = \{13, 1\}$ b) $s = \{13, -1\}$ c) $s = \{-13, 1\}$ d) $s = \{-13, -1\}$
- 6 $4y^2 - 32y = 17$ a) $s = \{\frac{1}{2}, \frac{17}{2}\}$ b) $s = \{\frac{-1}{2}, \frac{2}{17}\}$ c) $s = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{17}\}$ d) $s = \{\frac{-1}{2}, \frac{17}{2}\}$
- 7 $16z^2 - 40z - 11 = 0$ a) $s = \{\frac{11}{4}, \frac{1}{4}\}$ b) $s = \{\frac{-11}{4}, \frac{-1}{4}\}$ c) $s = \{\frac{11}{4}, \frac{-1}{4}\}$ d) $s = \{\frac{-11}{4}, \frac{1}{4}\}$
- 8 $y^2 - \frac{1}{3}y = \frac{2}{9}$ a) $\{\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\}$, b) $\{\frac{-3}{2}, \frac{1}{3}\}$
c) $\{\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\}$, d) $\{\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\}$
- 9 $z^2 + 2\sqrt{5}z = 4$ a) $s = \{3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}\}$ b) $s = \{\sqrt{5} - 3, 3 - \sqrt{5}\}$
c) $s = \{3 - \sqrt{5}, -3 - \sqrt{5}\}$ d) $s = \{\sqrt{5} + 3, \sqrt{5} - 3\}$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع، وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح:

- 10 $x^2 - 8x = 8$ a) $s \approx \{9, 1\}$ b) $s \approx \{9, -1\}$ c) $s \approx \{-9, 1\}$ d) $s \approx \{-9, -1\}$

Using General Law to solve the equations

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

1 $x^2 - 3x - 4 = 0$

a) $s = \{4, 1\}$

b) $s = \{4, -1\}$

c) $s = \{-4, 1\}$

d) $s = \{-4, -1\}$

2 $y^2 - 5y - 5 = 0$

a) $s = \left\{ \frac{3 + 5\sqrt{5}}{2}, \frac{3 - 5\sqrt{5}}{2} \right\}$

b) $s = \left\{ \frac{5 + 3\sqrt{5}}{4}, \frac{3 - 5\sqrt{5}}{4} \right\}$

c) $s = \left\{ \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}, \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2} \right\}$

d) $s = \left\{ \frac{5 + 3\sqrt{3}}{2}, \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2} \right\}$

3 $2x^2 - 8x = -3$

a) $s = \left\{ \frac{4 + \sqrt{10}}{2}, \frac{4 - \sqrt{10}}{2} \right\}$

b) $s = \left\{ \frac{2 + \sqrt{10}}{2}, \frac{4 + \sqrt{10}}{2} \right\}$

c) $s = \left\{ \frac{4 + \sqrt{5}}{4}, \frac{4 - \sqrt{5}}{4} \right\}$

d) $s = \left\{ \frac{2 + \sqrt{5}}{2}, \frac{2 - \sqrt{5}}{2} \right\}$

4 $3x^2 - 6(2x+1) = 0$

a) $s = \{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$

b) $s = \{2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\}$

c) $s = \{2 + \sqrt{6}, 2 - \sqrt{6}\}$

d) $s = \{6 + \sqrt{6}, 6 - \sqrt{6}\}$

حدّد جذور المعادلة باستعمال المميز:

5 $x^2 - 6x - 7 = 0$

(b) جذران حقيقيان غير نسبيين

(a) جذران حقيقيان نسبيين

(d) جذران غير حقيقيين (مجموعة الحل في $\emptyset = R$)

(c) جذران حقيقيان متساويان $\left(\frac{-b}{2a}\right)$

6 $2y^2 - 3y - 8 = 0$

(b) جذران حقيقيان غير نسبيين

(a) جذران حقيقيان نسبيين

(d) جذران غير حقيقيين (مجموعة الحل في $\emptyset = R$)

(c) جذران حقيقيان متساويان $\left(\frac{-b}{2a}\right)$

7 $8x^2 - 8x + 2 = 0$

(b) جذران حقيقيان غير نسبيين

(a) جذران حقيقيان متساويان $\left(\frac{-b}{2a}\right)$

(d) جذران غير حقيقيين (مجموعة الحل في $\emptyset = R$)

(c) جذر حقيقي واحد $\left(\frac{-b}{2a}\right)$

8 ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $y^2 - (k + 10)y + 16 = 0$ متساويين؟

a) $k = 2, -18$

b) $k = -2, -18$

c) $k = 6, 18$

d) $k = -6, -18$

Solving the Rational Equations

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية:

- 1 $\frac{2}{12x^2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4x}$ a) $s = \{2, \frac{1}{2}\}$ b) $s = \{-2, \frac{1}{2}\}$ c) $s = \{2, \frac{-1}{2}\}$ d) $s = \{-2, \frac{-1}{2}\}$
- 2 $\frac{5}{6} - \frac{7}{6y} + \frac{y}{3} = 0$ a) $s = \{1, \frac{-7}{2}\}$ b) $s = \{-1, \frac{-7}{2}\}$ c) $s = \{1, \frac{7}{2}\}$ d) $s = \{-1, \frac{7}{2}\}$
- 3 $\frac{8x}{5} = \frac{5}{8x}$ a) $s = \{\frac{5}{8}, \frac{-8}{5}\}$ b) $s = \{\frac{5}{8}, \frac{8}{5}\}$ c) $s = \{\frac{5}{8}, \frac{-5}{8}\}$ d) $s = \{\frac{8}{5}, \frac{-8}{5}\}$
- 4 $\frac{1+2y}{3y+9} = \frac{y}{2}$ a) $s = \{1, \frac{1}{3}\}$ b) $s = \{-1, \frac{1}{3}\}$ c) $s = \{2, \frac{1}{3}\}$ d) $s = \{-2, \frac{1}{3}\}$
- 5 $\frac{16x-64}{x^2} = 1$ a) $x = -8$ b) $x = 8$ c) $x = -6$ d) $x = 6$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية:

- 6 $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-1} = 1$ a) $s = \{2 + \sqrt{7}, 2 - \sqrt{7}\}$ b) $s = \{1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}\}$
c) $s = \{1 + \sqrt{7}, 1 - \sqrt{7}\}$ d) $s = \{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$
- 7 $\frac{y-6}{y+6} - \frac{y+6}{y-6} = \frac{24y^2+6}{y^2-36}$ a) $y = -\frac{1}{3}$ b) $y = -\frac{1}{2}$ c) $y = \frac{1}{3}$ d) $y = -\frac{1}{3}$
- 8 $\frac{x}{x+3} - \frac{x}{x-3} = \frac{x^2+12x+81}{x^2-9}$ a) $x = -9$ b) $x = 9$ c) $x = -8$ d) $x = 8$
- 9 $\frac{3y}{y-4} + \frac{y}{y-2} = \frac{5y^2-4y+8}{y^2-6y+8}$ a) $s = \{4, -2\}$ b) $s = \{-4, -2\}$ c) $s = \{-4, 2\}$ d) $s = \{4, 2\}$

المحتوى

الفصل الأول : العلاقات والمتباينات في الأعداد الحقيقية

5	الاختبار القبلي
6	الدرس الأول: ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية
10	الدرس الثاني: التطبيقات
14	الدرس الثالث: المتتابعات
18	الدرس الرابع: المتباينات المركبة
22	الدرس الخامس: متباينات القيمة المطلقة
26	الدرس السادس: خطة حل المسألة (افهم المسألة)
31	اختبار الفصل

الفصل الثاني : المقادير الجبرية

33	الاختبار القبلي
34	الدرس الأول: ضرب المقادير الجبرية
38	الدرس الثاني: تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر
42	الدرس الثالث: تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات
46	الدرس الرابع: تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة
50	الدرس الخامس: تحليل المقادير الجبرية مجموع مكعبين أو الفرق بين مكعبين ...
54	الدرس السادس: تبسيط المقادير الجبرية النسبية
58	الدرس السابع: خطة حل المسألة (الخطوات الأربع)
63	اختبار الفصل

الفصل الثالث : المعادلات

65	الاختبار القبلي
66	الدرس الأول: حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين
70	الدرس الثاني: حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد
74	الدرس الثالث: حل المعادلات التربيعية بالتجربة
78	الدرس الرابع: حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل
82	الدرس الخامس: حل المعادلات بالقانون العام
86	الدرس السادس: حل المعادلات الكسرية
80	الدرس السابع: خطة حل المسألة (كتابة معادلة)
95	اختبار الفصل
96	تمارينات الفصول - الاختيار من متعدد

الخطة الدراسية لتوزيع الحصص

عدد الحصص	الفصل الثالث	عدد الحصص	الفصل الأول
1	الاختبار القبلي	1	الاختبار القبلي
3	الدرس [3-1]	3	الدرس [1-1]
3	الدرس [3-2]	3	الدرس [1-2]
3	الدرس [3-3]	3	الدرس [1-3]
3	الدرس [3-4]	3	الدرس [1-4]
3	الدرس [3-5]	3	الدرس [1-5]
3	الدرس [3-6]	2	الدرس [1-6]
2	الدرس [3-7]	1	مراجعة الفصل
1	مراجعة الفصل	1	اختبار الفصل
1	اختبار الفصل	20	المجموع
23	المجموع	عدد الحصص	الفصل الثاني
		1	الاختبار القبلي
		3	الدرس [2-1]
		3	الدرس [2-2]
		3	الدرس [2-3]
		3	الدرس [2-4]
		3	الدرس [2-5]
		3	الدرس [2-6]
		2	الدرس [2-7]
		1	مراجعة الفصل
		1	اختبار الفصل
		23	المجموع